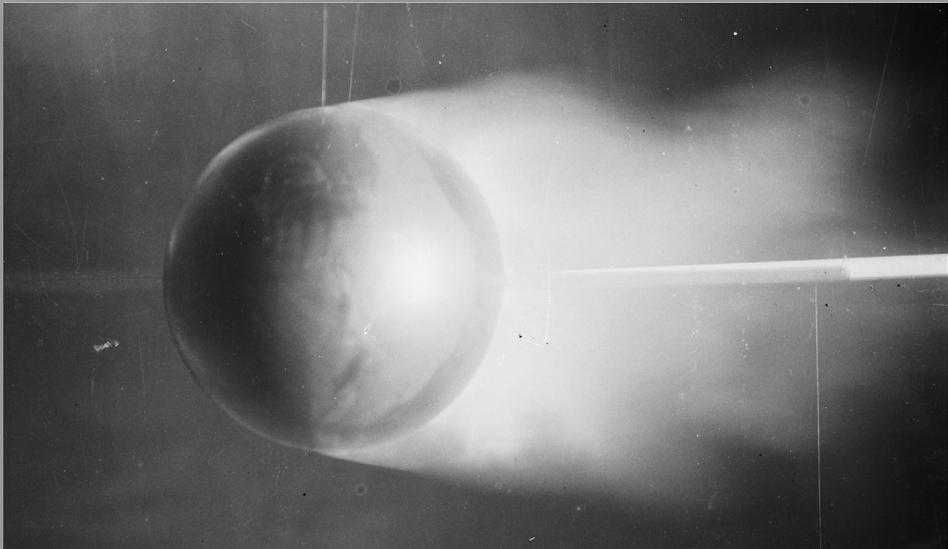


Martin Rein

Einführung in die Strömungsmechanik

Elementare Grundlagen und Beispiele



Universitätsdrucke Göttingen

Martin Rein
Einführung in die Strömungsmechanik

Dieses Werk ist lizenziert unter einer
[Creative Commons
Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen
4.0 International Lizenz.](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/)



erschieden in der Reihe der Universitätsdrucke
im Universitätsverlag Göttingen 2020

Martin Rein

Einführung in die Strömungsmechanik

Elementare Grundlagen
und Beispiele



Universitätsverlag Göttingen
2020

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

Adresse des Autors

Prof. Dr. Martin Rein
Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik
und
Georg-August-Universität Göttingen
Institut für Dynamik komplexer Systeme
E-Mail: martin.rein@dlr.de

Dieses Buch ist auch als freie Onlineversion über die Homepage des Verlags sowie über den Göttinger Universitätskatalog (GUK) bei der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen (<http://www.sub.uni-goettingen.de>) erreichbar. Es gelten die Lizenzbestimmungen der Onlineversion.

LaTeX-Skript: Dorian Marx, Sebastian Troue

Grafiken: Inga Kottlarz

Titelabbildung: Laminare Strömung um eine Kugel im ersten Göttinger Windkanal der Modellversuchsanstalt der Universität Göttingen (MVA, 1914)

© 2020 Universitätsverlag Göttingen

<https://univerlag.uni-goettingen.de>

ISBN: 978-3-86395-480-2

DOI: <https://doi.org/10.17875/gup2020-1362>

Vorwort

Diese *Einführung in die Strömungsmechanik* entspricht vom Umfang her meiner gleichnamigen Vorlesung, die ich an der Universität Göttingen regelmäßig für Student*innen der Physik ab dem dritten Studienjahr im Profilierungsbereich anbiete. Da es für die Strömungsmechanik viele Lehrbücher unterschiedlichster Ausrichtung gibt, habe ich bisher bewusst kein Skript zur Verfügung gestellt. Damit wollte ich vermeiden, dass ein solches bereits als hinreichend für ein ordentliches Verständnis des Faches angesehen wird. Stattdessen habe ich bisher auf eine Auswahl weiterführender Lehrbücher verwiesen. Hervorzuheben sind darunter das vielleicht erste Lehrbuch der modernen Strömungsmechanik, der *Abriß der Strömungslehre* von Ludwig Prandtl, und die *Theoretische Strömungslehre* von Karl Wieghardt, die beide im Universitätsverlag Göttingen als Nachdruck im Open Access verfügbar sind.

Zu Beginn des virtuellen Sommersemesters 2020 kam von einer kleinen Gruppe von Student*innen, die die Vorlesung bereits im Vorjahr gehört hatten, der Vorschlag, den Student*innen in dieser schwierigen Zeit der COVID-19-Pandemie zusätzlich zur Online-Vorlesung ein Skript zur Verfügung zu stellen. Aus ihrer Mitschrift hatten sie schon eine erste Vorlage in \LaTeX erstellt, bereits mit sämtlichen Abbildungen aus der Vorlesung als Vektorgrafiken. Im Laufe des virtuellen Sommersemesters 2020 habe ich daraufhin begleitend zur Vorlesung die Vorlage zu einem ausführlichen Text erweitert und durch weitere Abschnitte ergänzt. Der für ein Skript auf diese Weise vielleicht etwas umfangreiche Text kann und soll kein Lehrbuch ersetzen. Er dient allein einer ersten Einführung in die Grundlagen der Strömungsmechanik. Nicht alles wird in angemessener Tiefe behandelt. Insbesondere werden die durchaus wichtigen potentialtheoretischen Methoden praktisch gar nicht angesprochen, da sie in der in Göttingen ebenfalls regelmäßig gehaltenen Vorlesung Aerodynamik ausführlich vorgestellt werden.

Für die Unterstützung bei der Erstellung dieser Schrift möchte ich mich herzlich bei Dorian Marx und Sebastian Troue bedanken, die die \LaTeX -Vorlage formatiert sowie das \LaTeX -Dokument erstellt haben. Herzlicher Dank gilt ebenfalls Inga Kottlarz, die sämtliche Grafiken mit dem Programm Inkscape als Vektorgrafiken nach ihren Vorlesungsaufzeichnungen erzeugt und anschließend etliche meiner weiteren Wünsche erfüllt hat. Für eine abschließende sorgfältige Durchsicht des Manuskripts und hilfreiche Anmerkungen bin ich schließlich Dominik A. Suchla, der die Vorlesung einige Jahre zuvor gehört hatte, sehr dankbar.

Göttingen, im November 2020

Martin Rein

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Festkörper, Flüssigkeiten und Gase	1
1.2	Molekulare Betrachtungen	5
1.2.1	Transportvorgänge	5
1.2.2	Randbedingungen an überströmten Oberflächen	8
1.3	Kontinuumshypothese	9
1.4	Die Rohrströmung als einführendes Beispiel	11
1.4.1	Hagen-Poiseuille-Gesetz	11
1.4.2	Ähnlichkeit	16
2	Statik	19
2.1	Spannungszustand in ruhenden Fluiden	19
2.2	Hydrostatischer Druck	21
2.2.1	Beispiele	23
2.3	Druckverteilung in der Atmosphäre	24
2.3.1	Stabilität in der Atmosphäre	26
3	Kinematik	29
3.1	Betrachtungsweisen	29
3.1.1	Euler- und Lagrange-Koordinaten	29
3.1.2	Bahn-, Strom- und Streichlinien	31
3.1.3	Substantielle Zeitableitung	33
3.2	Kontinuitätsgleichung und Stromfunktion	34
3.3	Drehung, Wirbelvektor, Zirkulation	37
3.4	Geschwindigkeitspotential	42
3.5	Gradiententensor der Geschwindigkeit	44
4	Dynamik	49
4.1	Spannungszustand im reibungsbehafteten Fluid	49
4.1.1	Spannungstensor	49
4.1.2	Zusammenhang zwischen dem Spannungstensor und dem Gradiententensor der Geschwindigkeit	54
4.1.3	Navier-Stokes-Gleichung	56
4.2	Reibungsfreie Fluide	59
4.2.1	Euler-Gleichung	59
4.2.2	Bernoulli-Gleichung	64

4.2.3	Bernoulli-Gleichung; Beispiele	66
4.2.4	Definitionen	71
4.2.5	Druckmessung	72
4.3	Ähnlichkeitsbetrachtungen	73
4.3.1	Navier-Stokes-Gleichungen entdimensionalisiert; Kennzahlen	73
4.3.2	Dimensionsanalyse	76
4.3.3	Anwendung in der Versuchstechnik	82
4.4	Analytische Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen	85
4.5	Schleichende Strömungen	92
4.5.1	Kugelumströmung und Stokes'sches Widerstandsgesetz	94
4.5.2	Typische Eigenschaften schleichender Strömungen	98
4.5.3	Beispiele	99
5	Integraler Impuls- und Drallsatz	103
5.1	Formulierung der Gleichungen	103
5.1.1	Impulssatz	103
5.1.2	Drallsatz	105
5.2	Haltekraft für Körper in Parallelanströmung	106
5.3	Beispiele	112
6	Energie	121
6.1	Energiesatz	121
6.2	Stromfadentheorie	126
6.2.1	Zustandsgrößen und Geschwindigkeit	126
6.2.2	Verdichtungsstöße	135
7	Grenzschichten	149
7.1	Einleitung	149
7.2	Prandtl'sche Grenzschichtgleichungen	152
7.3	Plattengrenzschicht nach Blasius	155
7.4	Grenzschichtablösung	158
7.5	Instabilität der Plattengrenzschicht	160
7.6	Turbulente Grenzschicht und logarithmisches Wandgesetz	166
7.7	Widerstand	172
8	Wirbel- und drehungsbehaftete Strömungen	177
8.1	Definitionen	177
8.2	Wirbelsätze von Helmholtz und Thompson	178
8.3	Gesetz von Biot-Savart	183
8.4	Wirbelsatz von Crocco	185
8.5	Drehungsbehaftete Strömung mit Zähigkeit	187
8.6	Ausklang: Anfahrwirbel und induzierter Widerstand	190
A	Literatur	195

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Festkörper, Flüssigkeiten und Gase

Flüssigkeiten und Gase verhalten sich unter äußerer Krafteinwirkung anders als Festkörper. Dies liegt an der leichten Verschiebbarkeit der Teilchen in Flüssigkeiten und Gasen. Das unterschiedliche Verhalten betrachten wir am Beispiel eines materiegefüllten Volumens, der Einfachheit halber eines Quaders, vgl. Abbildung 1.1. An der Ober- und Unterseite möge jeweils eine Kraft F tangential zur Oberfläche angreifen, wobei die Kräfte oben und unten einander entgegengesetzt seien. Die Flächen der Ober- und Unterseite bezeichnen wir mit A . Damit wirken auf das Volumen Tangentialspannungen τ , auch Schubspannungen (engl. *shear stress*) genannt:

$$\tau = \frac{F}{A}. \quad (1.1)$$

Die Schubspannungen führen zu einer scherenden Beanspruchung, die in einer Verformung des Volumens resultiert (gestrichelte Linie in Abbildung 1.1). Die Seitenflächen neigen sich um einen Scherungswinkel γ . Der Zusammenhang zwischen dem Scherungswinkel γ und den Schubspannungen ist bei Festkörpern ein anderer als bei Flüssigkeiten und Gasen. Dies betrachten wir im Folgenden für kleine Scherungen.

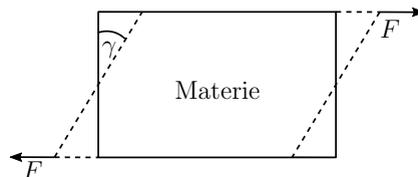


Abbildung 1.1: Verformung eines materiegefüllten Volumens unter scherender Beanspruchung.

Festkörper (*solids*)

- endliche Schubspannung \Rightarrow endliche Verformung, endliches γ ,
- beliebig lange Wirkung \Rightarrow nur endliche Scherung.

Für viele Festkörper gilt:

$$\gamma = f(\tau). \quad (1.2)$$

Oftmals ist die Funktion f linear in τ :

$$\gamma = \frac{1}{G} \tau. \quad (1.3)$$

Hierbei bezeichnet G den **Schubmodul**, eine Materialkonstante (vgl. Hooke'scher Körper).

Flüssigkeiten und Gase (*liquids and gases*)

- geben einer scherenen Beanspruchung unbegrenzt nach,
- Verformung hört nur auf, wenn Schubspannungen verschwinden,
- unendlich lange Wirkung \Rightarrow unendliche Verformung.

Im Ruhezustand existieren keine Schubspannungen.

Im Fall von Fluiden, die sich nicht im Ruhezustand befinden, ist deshalb nicht γ , sondern vielmehr die **Scherrate** $\dot{\gamma}$ (*shear rate*), also die zeitliche Änderung von γ , von Interesse. Für viele Flüssigkeiten und Gase gilt:

$$\dot{\gamma} = f(\tau). \quad (1.4)$$

Dieser Zusammenhang wird **Fließgesetz** der Flüssigkeit bzw. des Gases genannt. Oft ist die Funktion f linear in τ :

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{\mu} \tau. \quad (1.5)$$

Dies gilt für **Newton'sche** Flüssigkeiten und Gase (in weiten Bereichen z.B. für Wasser, Luft). Hierbei bezeichnet μ die **dynamische Zähigkeit** oder **Scherviskosität** (auch **dynamischer Zähigkeitskoeffizient** (*dynamic viscosity*)). Die Einheit der dynamischen Viskosität ist:

$$[\mu] = \text{Pa} \cdot \text{s}. \quad (1.6)$$

Generell ist μ eine Funktion der Temperatur T und des Druckes p . Die Abhängigkeit vom Druck ist jedoch in den meisten Fällen vernachlässigbar. Beispielsweise gilt dies für Luft für $p \lesssim 10 - 50$ bar (je nach Genauigkeitsanforderung).

Im Fall von Flüssigkeiten sinkt die dynamische Viskosität mit steigender Temperatur (Beispiele: Honig, Maschinenöl). Bei Gasen hingegen steigt die dynamische Viskosität mit steigender Temperatur:

$$\text{Flüssigkeiten: } \frac{\partial \mu}{\partial T} < 0, \quad (1.7)$$

$$\text{Gase: } \frac{\partial \mu}{\partial T} > 0. \quad (1.8)$$

Abbildung 1.2 zeigt die Temperaturabhängigkeit der Viskositäten von Luft, Wasser und einem Öl. In der Strömungsmechanik tritt häufig die durch die Dichte ρ geteilte dynamische Viskosität auf. Dieser Ausdruck wird als **kinematische Viskosität** ν bezeichnet:

$$\nu := \frac{\mu}{\rho}, \quad [\nu] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}}. \quad (1.9)$$

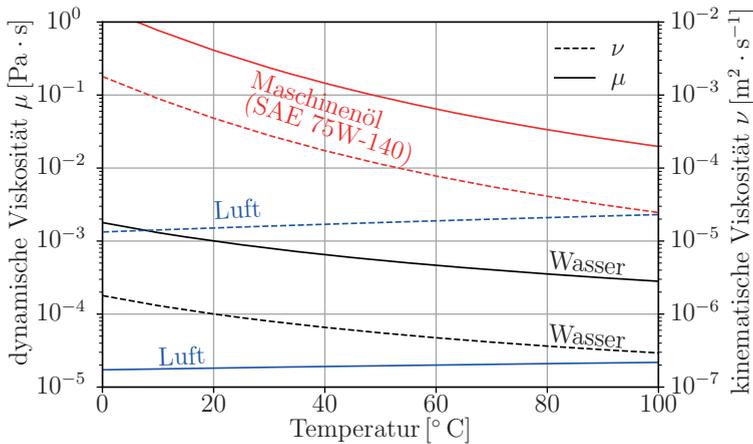


Abbildung 1.2: Temperaturabhängigkeit der Viskosität von Luft, Wasser und einem Öl, μ : dynamische Viskosität, ν : kinematische Viskosität.

Flüssigkeiten folgen nicht immer einem linearen Fließgesetz. Solche Flüssigkeiten werden dann als nicht-Newton'sche Flüssigkeiten bezeichnet. Abbildung 1.3 zeigt einige Beispiele. Die dynamische Viskosität ist hier abhängig von der Scherrate.

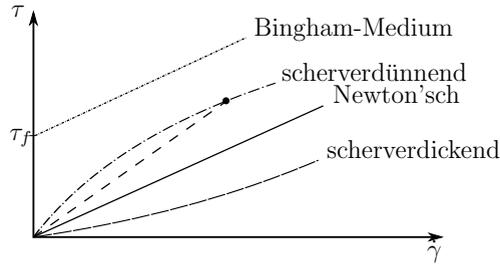


Abbildung 1.3: Fließgesetze einfacher nicht-Newton'scher Fluide.

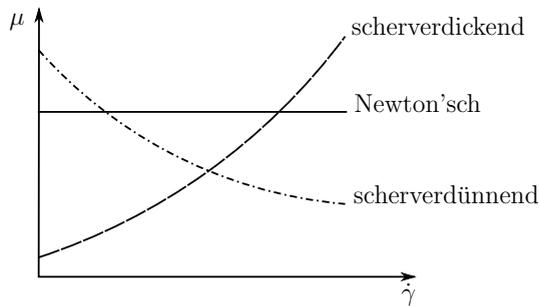


Abbildung 1.4: Dynamische Viskosität μ in Abhängigkeit von der Scherrate $\dot{\gamma}$ für Newton'sche Fluide ($\mu = const$) und nicht-Newton'sche Fluide ($\mu = \dot{\gamma}$).

Dies ist in Abbildung 1.4 skizziert. Bei den dilatanten oder scherverdickenden Flüssigkeiten (*shear thickening*) nimmt die Viskosität mit steigender Scherrate $\dot{\gamma}$ zu, bei den pseudoplastischen oder scherverdünnenden Flüssigkeiten (*shear thinning*) mit steigender Scherrate ab. Einen anderen Sonderfall bilden Bingham Medien. Diese verhalten sich unterhalb einer Schubspannung τ_f wie ein Festkörper, darüber wie eine Newton'sche Flüssigkeit:

- für $\tau < \tau_f$ wie Festkörper,
- für $\tau > \tau_f$ wie Newton'sche Flüssigkeiten mit $\dot{\gamma} = (\tau - \tau_f)/\mu$,
Beispiele: Zahnpasta, Ketchup.

Ein weiterer Sonderfall ist die vielen bekannte Hüpfknete. Bei kurzer starker Wirkung einer Spannung, z.B. wenn man die Knete auf eine feste Oberfläche wirft, reagiert die Knete wie ein elastischer Körper (Flummi), lässt man sie dagegen lange liegen, zerfließt sie. Der Übergang zwischen fest und flüssig ist fließend. Nicht-Newton'sche Flüssigkeiten werden in der **Rheologie** behandelt.

Es bleibt, weitere Unterschiede zwischen Flüssigkeiten und Gasen, die für das strömungsmechanische Verhalten wichtig sind, einander gegenüberzustellen:

Flüssigkeiten

- bilden Oberflächen aus:
⇒ „tropfbare“ Flüssigkeiten,
- geringe Kompressibilität, häufig vernachlässigbar:
⇒ inkompressible Flüssigkeit.

Gase

- expansiv, füllen Raum aus,
- hohe Kompressibilität:
⇒ Thermodynamik kommt ins Spiel (hoher Druck ⇒ hohe Temperatur).

In vielen Fällen sind die Unterschiede nicht entscheidend für das strömungsmechanische Verhalten. Wenn das der Fall ist, fassen wir im Folgenden Flüssigkeiten und Gase als **Fluide** (*fluids*) zusammen.

1.2 Molekulare Betrachtungen

1.2.1 Transportvorgänge

In Strömungen führt Viskosität zu einem Transport von Impuls. Dies lässt sich für (verdünnte) Gase über eine Betrachtung der Vorgänge auf molekularer Ebene illustrieren. Andere Transportvorgänge, die über molekulare Vorgänge ablaufen, sind die von Masse und Wärme über Diffusion und Wärmeleitung:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Diffusion} \\ \text{Viskosität} \\ \text{Wärmeleitung} \end{array} \right\} \text{Transport auf molekularer Ebene} \left\{ \begin{array}{l} \text{von Masse,} \\ \text{von Impuls,} \\ \text{von Energie.} \end{array} \right.$$

Masse- und Wärmetransport treten bei Vorliegen von Konzentrations- beziehungsweise Temperaturgradienten auf. In ähnlicher Weise hängt der Impulstransport mit Geschwindigkeitsunterschieden im Strömungsfeld zusammen. Dies lässt sich in einfacher Weise am Beispiel von Gasen über eine Betrachtung der Vorgänge auf molekularer Ebene illustrieren. Dazu betrachten wir eine ebene Parallelströmung, siehe Abbildung 1.5a. Die Strömung verläuft an jedem Ort in die gleiche Richtung. Mit steigendem y erhöht sich in diesem Beispiel der Betrag der Strömungsgeschwindigkeit u . Das Geschwindigkeitsprofil bei $x = x_0$ ist in Abbildung 1.5b dargestellt. Im Folgenden wird in einer derartigen Strömung der Impulsfluss in y -Richtung untersucht. Wir betrachten dazu den Austausch von Gasmolekülen zwischen benachbarten Fluidschichten bei y_0 .

Aufgrund thermischer Fluktuationen kommen bei y_0 ständig Moleküle an, die aus einem Abstand Δy stammen, der der mittleren freien Weglänge λ entspricht. Dabei bringen sie den dort herrschenden Impuls mit (vgl. Abbildung 1.5b). Da die Geschwindigkeit oberhalb und unterhalb von y_0 verschieden ist, führt dies

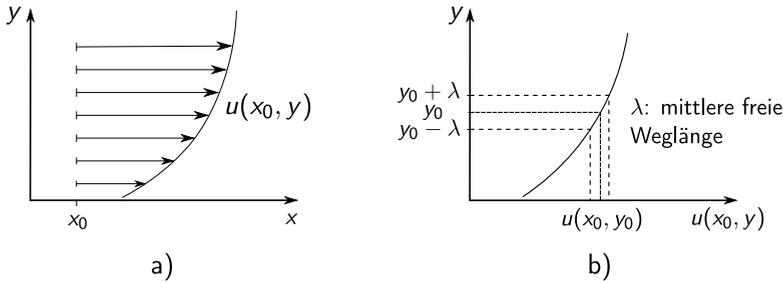


Abbildung 1.5: Ebene Parallelströmung. a) Parallelströmung, b) Geschwindigkeitsprofil bei $x = x_0$.

am Ort (x_0, y_0) zu einem Impulsfluss in y -Richtung. Um diesen zu bestimmen, entwickeln wir zunächst die Geschwindigkeit an benachbarten Orten $y_0 \pm \Delta y$ in eine Taylor-Reihe und brechen nach dem linearen Glied ab:

$$u(x_0, y_0 \pm \Delta y) \approx u(x_0, y_0) \pm \frac{du}{dy} \Delta y. \quad (1.10)$$

Mit $\Delta y = \lambda$ erhalten wir für den Impulstransport quer zur Strömungsrichtung:

$$\frac{1}{2} \frac{n}{3} v m \underbrace{\left(u + \lambda \frac{du}{dy}\right)}_{\text{Impuls bei } y_0 + \lambda} - \frac{1}{2} \frac{n}{3} v m \underbrace{\left(u - \lambda \frac{du}{dy}\right)}_{\text{Impuls bei } y_0 - \lambda} = \boxed{\frac{n}{3} v m \lambda \frac{du}{dy} = \tau}. \quad (1.11)$$

Es gelten dabei folgende Bezeichnungen:

- λ : mittlere freie Weglänge
 - m : Masse
 - n : Anzahldichte
 - v : mittlere thermische Geschwindigkeit
- } der Moleküle.

In Gleichung (1.11) bedeutet der Faktor $n/3$, dass nur ein Drittel der Moleküle Schwingungsbewegungen in y -Richtung ausführt, davon die Hälfte (Faktor $1/2$) in Richtung y_0 , sowohl von „oben“ ($y = y_0 + \lambda$) als auch von „unten“ ($y = y_0 - \lambda$). Der Impulsfluss ist eine zeitliche Änderung des Impulses pro Fläche, also eine Kraft pro Fläche. Hier wird der Fluss der x -Komponente des Impulses in y -Richtung betrachtet, daher entspricht der Impulsfluss einer Schubspannung. Dieser Zusammenhang wird im eingekasteten Teil der Gleichung (1.11) wiedergegeben.

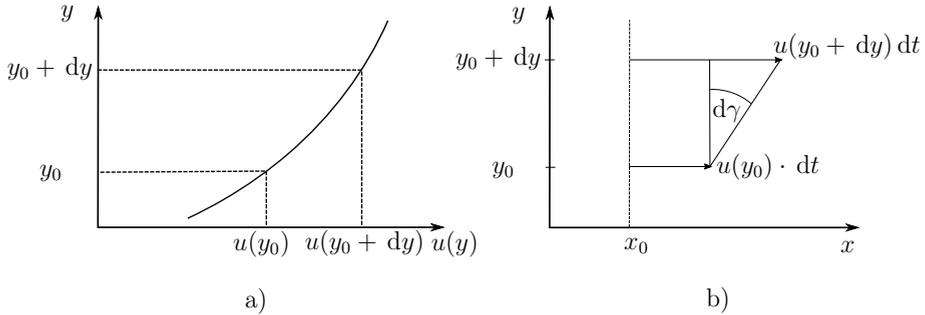


Abbildung 1.6: Zusammenhang zwischen du/dy und $\dot{\gamma}$. a) Geschwindigkeitsprofil, b) Bewegung einer Linie in einer Scherströmung.

Es gibt einen Zusammenhang zwischen der Größe du/dy in Gleichung (1.11) und $\dot{\gamma}$. Dazu betrachten wir Abbildung 1.6. Das Geschwindigkeitsprofil bei x_0 gemäß Abbildung 1.6a führt dazu, dass sich einzelne Elemente einer Linie, die zunächst senkrecht zur Bewegungsrichtung steht (gestrichelte Linie bei $x_0 = \text{const}$ in Abbildung 1.6b), in einem kleinen Zeitintervall dt verschieden weit in x -Richtung bewegen. Die Linie „kippt“ daher im Zeitintervall dt um einen Scherwinkel $d\gamma$. Für kleine dt ist auch $d\gamma$ klein und es gilt:

$$d\gamma \approx \tan(d\gamma) = \frac{u(y_0 + dy)dt - u(y_0)dt}{dy} \stackrel{\text{Taylor}}{\approx} \frac{du(y_0)}{dy} dy dt / dy \quad (1.12)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\gamma}{dt} = \dot{\gamma} = \frac{du}{dy}} \quad (1.13)$$

Ersetzen von du/dy in Gleichung (1.11) durch Gleichung (1.13) liefert:

$$\tau = \frac{n}{3} v \lambda m \frac{du}{dy} = \frac{n}{3} v \lambda m \dot{\gamma} = \mu \dot{\gamma}. \quad (1.14)$$

Hier hat der Vergleich mit Gleichung (1.5) folgenden Ausdruck für die dynamische Viskosität ergeben:

$$\boxed{\mu = \frac{n}{3} v \lambda m.} \quad (1.15)$$

Diskussion

- $n \cdot \lambda \approx \text{const}$ (ohne Beweis). Bei steigendem Druck sinkt λ , während n steigt, $\Rightarrow \mu$ ist kaum druckabhängig (gilt in Luft für $p = 10 - 50$ bar, je nach Genauigkeitsanforderung),
- in Gasen steigt v mit steigender Temperatur T , $\Rightarrow d\mu_{\text{Gas}}/dT > 0$.

1.2.2 Randbedingungen an überströmten Oberflächen

Zwischen zwei Festkörpern kennt man den Effekt der Haft- und Gleitreibung. Letztere tritt auf, wenn zwei sich berührende Festkörper relativ zueinander bewegt werden. Es stellt sich hier die Frage, wie es im Fall von Fluiden, die über feste Oberflächen strömen, aussieht.

Das Verhalten von Fluiden an Oberflächen betrachten wir wieder am Beispiel eines Gases. Wie im Fall der Gleitreibung, wo es eine Relativbewegung zwischen zwei Festkörpern gibt, treffen wir hier zunächst die Annahme, dass auch zwischen einer festen Wand und einem darüber entlang strömenden Gas eine Relativgeschwindigkeit herrscht und überlegen dann, wie groß diese ist. Im Folgenden befindet sich die Wand in Ruhe und die Gasgeschwindigkeit an der Wand sei $u_W \neq 0$. Ein entsprechendes Geschwindigkeitsprofil ist in Abbildung 1.7a dargestellt. Aufgrund thermischer Fluktuationen treffen ständig Moleküle aus einem Wandabstand, der der mittleren freien Weglänge entspricht, auf die Wand und werden dort reflektiert (siehe Abbildung 1.7b). Im Fall einer Wand, die auf molekularer Ebene glatt ist, würde das Molekül spiegelnd reflektiert und dabei die wandparallele Komponente u_e seiner Einfallgeschwindigkeit behalten. Real sind feste Oberflächen jedoch auf molekularer Ebene immer rau und es findet eher eine diffuse Reflexion statt. Der Ausfallwinkel φ_r ist dann kleiner als Einfallwinkel φ_e und im Mittel haben die reflektierten Moleküle nach der Reflexion eine reduzierte wandparallele Geschwindigkeit u_r :

$$u_r = \beta u_e, \quad \text{experimentell: } \beta \approx 0,2. \quad (1.16)$$

Die Geschwindigkeit an der Wand ergibt sich jetzt als Mittelwert zwischen einfallenden und reflektierten Molekülen:

$$u_W = \frac{1}{2} (u_e + u_r).$$

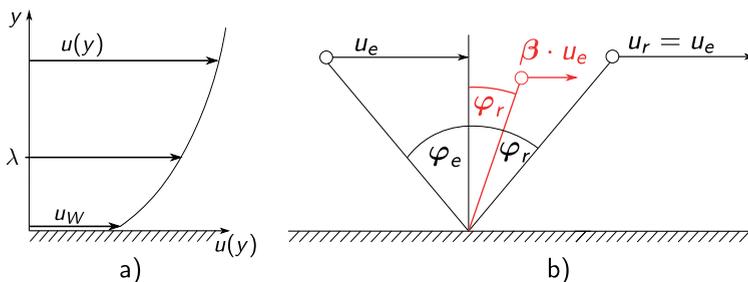


Abbildung 1.7: Geschwindigkeit an festen Oberflächen. a) Geschwindigkeitsprofil, b) Reflexion an glatter bzw. rauher Wand (rote Linie).

Dabei kommen die einfallenden Moleküle aus einem Abstand $\Delta y \approx \lambda$ (λ : mittlere freie Weglänge), da sie dort den letzten Stoß mit einem anderen Molekül erfahren haben. Damit:

$$\begin{aligned}
 u_W &= \frac{1}{2} (u_e + \beta u_e) \\
 &= \frac{1}{2} \left[\left(u_W + \lambda \frac{du}{dy} \right) + \beta \left(u_W + \lambda \frac{du}{dy} \right) \right] \\
 \Rightarrow \quad u_W(1 - \beta) &= \lambda(1 + \beta) \frac{du}{dy} \Big|_{y=0}, \\
 \boxed{u_W} &= \frac{(1 + \beta)}{(1 - \beta)} \lambda \frac{du}{dy} \Big|_{y=0}. \tag{1.17}
 \end{aligned}$$

Mit $\beta < 1$, λ sehr klein (typischerweise unter Normbedingungen $\lambda \approx 10^{-7}$ m) und da Geschwindigkeitsänderungen über $\Delta y = \lambda$ klein sind:

$$\Rightarrow \boxed{u_W \approx 0}. \tag{1.18}$$

Das Verschwinden der Geschwindigkeit an einer Wand wird experimentell bestätigt und gilt auch für Flüssigkeiten. Dies wird als Haftbedingung bezeichnet:

Haftbedingung

Fluide haften an festen Wänden (*no-slip condition*). (1.19)

Bei sehr großen mittleren freien Weglängen (z.B. Gas unter sehr niedrigem Druck, äußere Atmosphäre) oder bei sehr hohen Geschwindigkeitsgradienten (z.B. in Gleitlagern, Spaltströmungen, Mikrofluidik) können jedoch merkliche Relativgeschwindigkeiten zwischen Fluid und Wand auftreten. Man spricht von **Gleitströmungen**.

1.3 Kontinuumshypothese

Makroskopische Eigenschaften eines Fluids, z.B. Druck, Temperatur oder Geschwindigkeit, erhält man durch Mittelung über viele Moleküle. Die Temperatur als skalare Größe möge als einfaches Beispiel dienen. In Abbildung 1.8 ist die gemittelte Temperatur in Abhängigkeit von der Größe des Volumens (L^3), über das gemittelt wird, gegen das zugehörige Längenmaß L logarithmisch aufgetragen. Der Mittelpunkt des Volumens sei dabei fest gehalten. Bei sehr kleinen Längen ändert sich der Mittelwert aufgrund thermischer Fluktuationen der einzelnen Moleküle, bei sehr großen Längen ändert sich der Mittelwert aufgrund unterschiedlicher Temperaturen in der Umgebung. Dazwischen liegt idealerweise ein Bereich mit konstantem Mittelwert. Dieser wird als der lokale Wert der Temperatur betrachtet. Die in Abbildung 1.8 eingezeichneten Längen sind wie folgt zu interpretieren:

- L_1 : eine Größenordnung größer als mittlere Molekülabstände,
 L_2 : Größenordnung eines „Fluidteilchens“ (s.u.), $\lambda \ll L_2$,
 L_3 : „charakteristische“ Länge der Strömung (z.B. Länge, Breite oder Höhe bei einem umströmten Auto).

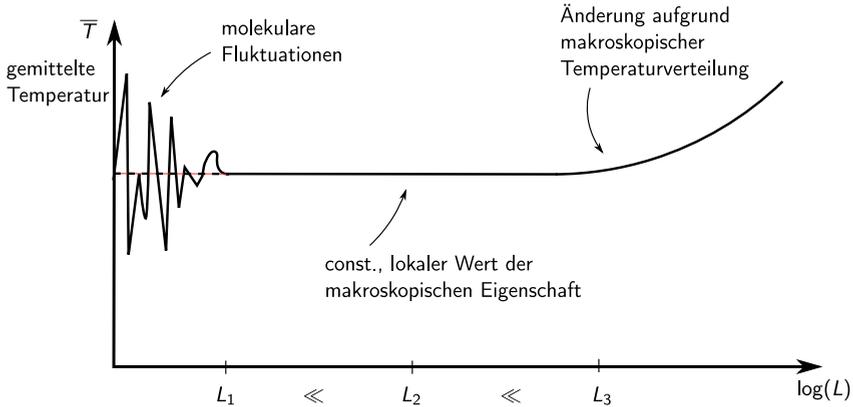


Abbildung 1.8: Gemittelte Temperatur \bar{T} in Abhängigkeit von der Längenskala L , die ein Maß für die Größe des Mittelungsvolumens ist.

Kontinuumshypothese

Fluide können als Kontinuum idealisiert werden,
 dessen makroskopische Eigenschaften **stetige**
 Funktionen des Ortes sind.

(1.20)

Makroskopische Eigenschaften erfordern dabei die Mittelung über viele Moleküle. Aus der Hypothese folgt, dass auch beliebig kleine Fluidvolumina definierte makroskopische Eigenschaften besitzen.

Fluidteilchen Als Fluidteilchen bezeichnen wir ein kleines fluidgefülltes Volumen, das lokale makroskopische Eigenschaften besitzt.

Im Folgenden werden auf Basis der Kontinuumshypothese Strömungen mit Mitteln der Kontinuumsmechanik beschrieben. Bereits gefundene Zusammenhänge wie $\tau = \mu \frac{du}{dy}$ sind als phänomenologische Gesetze gegeben, die nicht über molekulare Betrachtungen abgeleitet werden. Beschreibungen für Strömungsvorgänge werden ab jetzt also durch die Bewegungsgleichungen für kontinuierliche Fluide geschehen. Die folgenden 7 Variablen sind dafür von Interesse:

- Geschwindigkeit \vec{u} ,
- Druck p ,
- Dichte ρ .
- Temperatur T ,
- innere Energie e ,

Das Ziel ist die Kenntnis dieser Variablen an jedem Ort zu jeder Zeit t . Dafür stehen folgende Gleichungen zur Verfügung:

- | | | |
|--|---|------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> • Kontinuitätsgleichung • Impulserhaltung (drei Richtungen) • Energieerhaltung • thermische Zustandsgleichung • kalorische Zustandsgleichung | } | ⇒ 7 Gleichungen. |
|--|---|------------------|

1.4 Die Rohrströmung als einführendes Beispiel

1.4.1 Hagen-Poiseuille-Gesetz

Wir wenden uns nun der Rohrströmung zu und leiten das Hagen-Poiseuille-Gesetz her. In Abbildung 1.9 ist dargestellt, wie die hier besprochene Rohrströmung experimentell realisiert werden kann. Ein Reservoir verfügt über einen Zulauf, durch den eine Flüssigkeit einfließt und einen Überlauf, der sicherstellt, dass der Flüssigkeitsspiegel stets auf gleicher Höhe bleibt, also der Druck p_a am Anfang des Rohres konstant ist. Das gerade Rohr mit Radius R und Länge L beginnt im unteren Bereich des Reservoirs, etwas über dem Boden, so dass dieser das Einströmen nicht beeinflusst. Am Ende des horizontalen Rohres fließt die Flüssigkeit in die Atmosphäre aus. Dort herrscht atmosphärischer Druck p_e . Um die Strömung im Rohr zu bestimmen, treffen wir folgende Annahmen:

- Strömung ist stationär (Randbedingungen sind unabhängig von der Zeit),
- Dichte ist konstant (Flüssigkeit),
- Strömung ist axialsymmetrisch (Geometrie axialsymmetrisch),
- Geschwindigkeit verläuft parallel zur Rohrachse, ist unabhängig vom Ort x entlang der Achse, also $u = u(r)$,
- Druck ist unabhängig vom Radius, also $p = p(x)$ (kleine hydrostatische Druckunterschiede werden vernachlässigt).

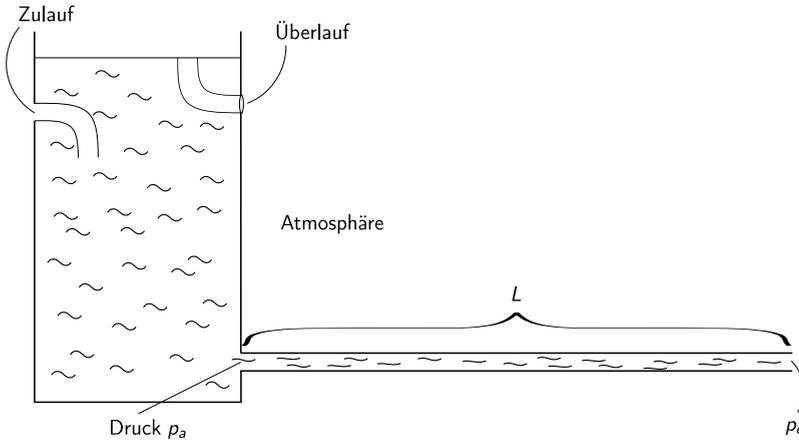


Abbildung 1.9: Rohrströmung: experimentelle Anordnung.

Auf die Flüssigkeit im Rohr wirken beschleunigende Druck- und verzögernde Reibungskräfte. Um dies genauer zu untersuchen, denken wir uns ein Flüssigkeitsvolumen in der Form eines Hohlzylinders mit Radius r , Wandstärke δr und kleiner Länge l (siehe Abbildung 1.10). Das Volumen des flüssigen Hohlzylinders liegt axialsymmetrisch im Rohr und wird durchströmt.

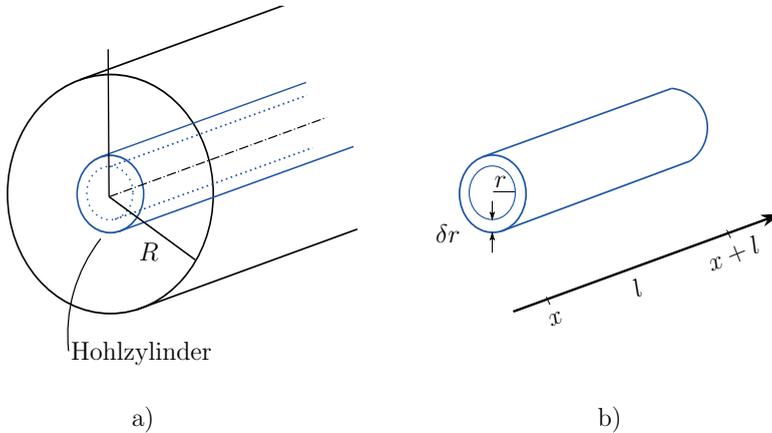


Abbildung 1.10: Rohrströmung: Geometrie zur Kräftebilanz am Hohlzylinder. a) Anordnung eines Volumens in der Form eines gedachten koaxialen Hohlzylinders im Rohr, b) Abschnitt des gedachten Hohlzylinders der Länge l , mit Radius r und „Wanddicke“ δr .

Der Druck wirkt auf die beiden Stirnflächen des Hohlzylinders. Liegt eine Druckdifferenz zwischen den beiden Enden vor, so ergeben sich die Druckkräfte zu:

$$[p(x) - p(x + l)] \cdot 2\pi r \delta r \approx -\frac{dp}{dx} l 2\pi r \delta r. \quad (1.21)$$

Die reibungsbedingten Schubspannungen wirken auf die innere und äußere Mantelfläche des Hohlzylinders. Die Spannungen werden durch die nicht zum Hohlzylinder gehörende Flüssigkeit direkt neben den beiden Mantelflächen ausgeübt. Dies ist in Abbildung 1.11 für ein als beliebig angenommenes Geschwindigkeitsprofil $u(r)$ skizziert. Die schnellere Flüssigkeit zieht jeweils die langsamere mit sich. Umgekehrt verzögert die langsamere Flüssigkeit die schnellere. Im Gleichgewicht sind die entsprechenden Schubspannungen von gleichem Betrag, aber entgegengesetzt gerichtet (vgl. Abbildung 1.11). Dies gilt getrennt für die innere und äußere Mantelfläche. Die Schubspannungen sind hier jeweils leicht versetzt gezeichnet, um anzudeuten, auf welchen Bereich sie wirken. Die Schubspannungen verursachen entgegengesetzte Tangentialkräfte F auf der inneren und äußeren Mantelfläche:

$$F(r) = \tau(r)2\pi r l = \mu \frac{du}{dr} 2\pi r l. \quad (1.22)$$

Falls die Schubspannungen an den beiden Mantelflächen betragsmäßig unterschiedlich groß sind, wirkt eine Tangentialkraft ΔF auf die Flüssigkeit im Volumen des Hohlzylinders:

$$\Delta F = F(r + \delta r) - F(r) \approx \frac{dF}{dr} \delta r = \frac{d}{dr} \left(\mu \frac{du}{dr} 2\pi r l \right) \delta r. \quad (1.23)$$

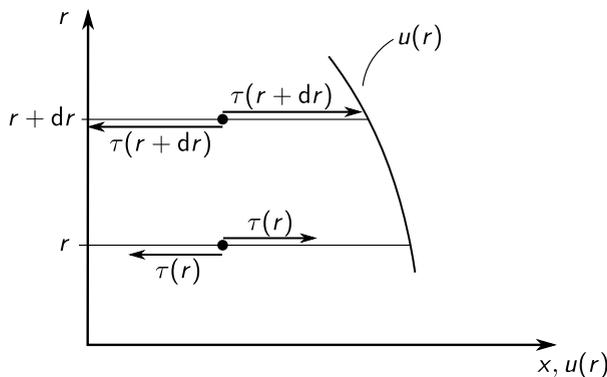


Abbildung 1.11: Reibungsspannungen (Schubspannungen), die an den Mantelflächen des gedachten Hohlzylinders wirken.

Dies ist eine Reibungskraft. Die Reibungskraft hängt von der zweiten Ableitung der Geschwindigkeit nach dem Radius ab. Dies gilt allgemeiner auch in anderen Strömungen.

Im stationären Fall stellt sich ein Kräftegleichgewicht zwischen Druck- und Reibungskräften ein, es folgt für die radiusabhängige Geschwindigkeit u :

$$\Delta F + \Delta p = \frac{d}{dr} \left(\mu \frac{du}{dr} 2\pi r l \right) \delta r - \frac{dp}{dx} l \cdot 2\pi r \delta r = 0 \quad (1.24)$$

$$\Rightarrow u(r) = \frac{r^2}{4\mu} \frac{dp}{dx} + A \log r + B. \quad (1.25)$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten A und B verwenden wir die folgenden Bedingungen:

- Geschwindigkeit endlich bei $r = 0 \Rightarrow A = 0$,
- bei $r = R$ muss $u(r = R) = 0$ gelten (wegen der Haftbedingung)
 $\Rightarrow B = -R^2/4\mu \cdot dp/dx$,

$$\Rightarrow \boxed{u(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (R^2 - r^2)}. \quad (1.26)$$

Diskussion

i) Für den Druckgradienten gilt:

$$\frac{dp}{dx} = -4\mu u(r) \frac{1}{R^2 - r^2}, \quad (1.27)$$

linke Seite unabhängig von r }
 rechte Seite unabhängig von x } \Rightarrow beide Seiten konstant

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dp}{dx} = \frac{p_e - p_a}{L}}, \quad \text{linearer Druckabfall.} \quad (1.28)$$

Hierbei bezeichnen p_a und p_e den Druck am Anfang respektive Ende des betrachteten Bereiches.

ii) Geschwindigkeitsprofil:

$$\boxed{u(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{p_a - p_e}{L} (R^2 - r^2)}, \quad \text{Rotationsparaboloid.} \quad (1.29)$$

Diese Aussagen gelten genau genommen nur weit entfernt von den Rohrenden. Insbesondere beim Einströmen in das Rohr verhält es sich anders. Anfangs liegt ein fast rechteckiges Geschwindigkeitsprofil vor. In der Rohrmitte herrscht eine konstante Geschwindigkeit. Aufgrund der Haftbedingung verschwindet die Geschwindigkeit an der Rohrwand. Dies führt zu einer Verzögerung benachbarter Fluidschichten. Da der Volumenstrom konstant bleibt (stationäre, inkompressible Strömung), erhöht sich in Richtung stromab gleichzeitig die Geschwindigkeit in der Rohrmitte. Dies ist in Abbildung 1.12 skizziert. Der Übergangsbereich (in radialer Richtung) von Geschwindigkeit null am Rand zum Bereich mit konstanter Geschwindigkeit in der Rohrmitte wird stromab immer größer, bis er das ganze Rohr ausfüllt. Solche Gebiete, in denen die Geschwindigkeit von null an einer Wand auf eine Fernfeld-Geschwindigkeit anwächst, findet man an allen überströmten festen Oberflächen. Sie werden **Reibungs-** oder **Grenzschicht** genannt.

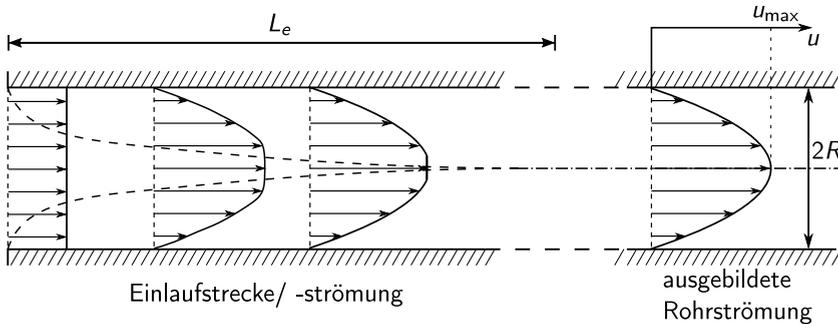


Abbildung 1.12: Einlaufströmung einer Rohrströmung: Geschwindigkeitsprofile für verschiedene Abstände vom Rohranfang – Entwicklung der anfangs über den Rohrquerschnitt nahezu konstanten Geschwindigkeit in ein Profil von der Form eines Rotationsparaboloids.

Den Durchfluss oder Volumenstrom Q (Volumen pro Zeit) erhält man durch Integration der Geschwindigkeit (nach Gleichung (1.29)) über die Querschnittsfläche:

Hagen-Poiseuille-Gesetz

$$Q = \int_0^R dr u(r) 2\pi r = \frac{\pi}{8\mu} \frac{p_a - p_e}{L} R^4. \quad (1.30)$$

Diskussion

- i) $Q \propto R^4$: kleine Änderungen des Radius haben große Wirkung auf den Durchfluss (z.B. in elastischen Blutgefäßen),

ii) mittlere Durchflussgeschwindigkeit \bar{u} :

$$\bar{u} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{1}{8\mu} \frac{p_a - p_e}{L} R^2 = \frac{1}{2} u(r=0) = \frac{u_{\max}}{2}, \quad (1.31)$$

iii) Zähigkeitsbestimmungen können über Durchflussmessungen durchgeführt werden,

iv) Hagen-Poiseuille-Gesetz wird experimentell erfüllt \rightarrow Haftbedingung bestätigt.

Rohrströmungen erfüllen nicht immer das Hagen-Poiseuille-Gesetz. Theoretisch und praktisch gibt es andere Strömungsformen. Rohrströmungen verlaufen dann nicht mehr zwangsweise parallel; es sind auch wirbelnde Mischbewegungen möglich. In diesem Fall verliert der gefundene Zusammenhang $Q \propto \Delta p/L$ seine Richtigkeit. Es gilt dann:

$$Q \propto \left(\frac{\Delta p}{L} \right)^{1/n}, \quad n \approx 1.5 - 2.0 \quad (1.32)$$

Diese unterschiedlichen Strömungsformen, die im Fall der Rohrströmung mit verschiedenen Durchflussgesetzen gekoppelt sind, treten auch sonst in der Strömungsmechanik auf. Man unterscheidet:

- „glatte“ Bewegungen (parallele Strömung im Rohr) \rightarrow **laminare Strömung** (lat. *lamina*: Schicht),
- „wirbelnde“ Mischbewegungen \rightarrow **turbulente Strömung** (lat. *turbulentia*: Angst, Unruhe, Verwirrung).

Die hier eingeführten Begriffe gelten allgemein.

1.4.2 Ähnlichkeit

Der folgende Abschnitt widmet sich Ähnlichkeitsbetrachtungen. Diese ermöglichen z.B. die Untersuchung von strömungsmechanischen Vorgängen an kleinen Modellen, aus denen dann auf die Vorgänge bei der Umströmung in Originalgröße geschlossen werden kann. Dabei ist zu berücksichtigen, wie verschiedene Kräfte (z.B. Widerstand, Auftrieb) auf umströmte Körper wirken. Man unterscheidet in diesem Kontext zwischen zwei Arten von Ähnlichkeit:

- **geometrische Ähnlichkeit**, die sich ausschließlich auf die geometrische Eigenschaften des Problems bezieht,
- **dynamische Ähnlichkeit**, die ein ähnliches Verhalten von Kräften betrifft.

Im Allgemeinen sind die einzelnen wirkenden Kräfte nicht immer bekannt, aber abhängig von experimentellen Parametern. Wir betrachten dies wieder am Beispiel der Rohrströmung. Dort hatten wir die Parameter:

$$\mu, p, R, L, \Delta p = p_a - p_e \text{ und } \bar{u}. \quad (1.33)$$

Frage: Ist die Rohrströmung laminar oder turbulent? Die Antwort auf diese Frage sollte nicht von speziell gewählten Dimensionen abhängen, die Wahl der Einheiten also keine Rolle spielen. Die physikalische Erwartung ist, dass \bar{u} direkt vom Druckgradienten, also $(p_a - p_e)/L$, abhängt. Daher wird im Folgenden allein \bar{u} und nicht $(p_a - p_e)/L$ berücksichtigt. Für genügend lange Rohre erwarten wir weiterhin, dass L keine Rolle spielt (bei gegebenem Druckgradienten). Die Dimensionen der oben genannten Parameter lauten wie folgt:

$$[\mu] = \frac{\text{Masse}}{\text{Zeit} \cdot \text{Länge}}, \quad [\rho] = \frac{\text{Masse}}{\text{Länge}^3}, \quad [R] = \text{Länge}, \quad [\bar{u}] = \frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}}. \quad (1.34)$$

Osborne Reynolds hat aus diesen Parametern eine dimensionslose Größe geformt, die nach ihm benannte **Reynolds-Zahl** Re :

Reynolds-Zahl

$$Re := \frac{\rho \bar{u} 2R}{\mu} = \frac{\bar{u} 2R}{\nu}. \quad (1.35)$$

Experimentell fand er, dass die Rohrströmung bei kleinen Reynolds-Zahlen laminar und bei großen turbulent verläuft. Der Übergang erfolgt bei $Re \approx 2 \cdot 10^3$ bis 10^5 . Der genaue Wert hängt von Feinheiten des experimentellen Aufbaus und von Störungen in der Zuströmung ab.

Auch in anderen Strömungsfällen ermöglicht die Reynolds-Zahl abzuschätzen, ob eine Strömung laminar oder turbulent ist. Bei geometrisch ähnlichen Fällen geschieht der Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung dann bei gleicher Reynolds-Zahl. Der kritische Wert der Reynolds-Zahl hängt dabei vom jeweiligen Problem ab. Es gibt viele weitere solche dimensionslose Größen in der Strömungsmechanik. Sie werden **Kennzahlen** genannt und aus Größen gebildet, die für das Problem charakteristisch sind.

Frage: Welcher Druckgradient wird für einen bestimmten Durchfluss benötigt? Wir betrachten den Fall, dass $R = \text{const.}$ Dann gilt für den Durchfluss durch das Rohr:

$$Q \propto \bar{u} \propto Re. \quad (1.36)$$

Der Durchfluss lässt sich also als Funktion von der Reynolds-Zahl ausdrücken. Die Reynolds-Zahl ist damit auch ein Maß für den Durchfluss.

- **laminar:**

$$Re = \frac{\rho \bar{u} 2R}{\mu} \stackrel{\bar{u} = Q/\pi R^2}{=} \frac{Q}{\pi R^2} \frac{\rho}{\mu} 2R \stackrel{\text{H.-P.}}{=} \frac{\rho}{4\mu^2} R^3 \frac{p_a - p_e}{L} \quad (1.37)$$

⇒ für laminare Strömungen gilt:

$$\boxed{\frac{p_a - p_e}{L} \propto Re.} \quad (1.38)$$

• turbulent (empirisch):

$$\boxed{\frac{p_a - p_e}{L} \propto Re^n, \quad n \approx 1,5 - 2,0.} \quad (1.39)$$

Abbildung 1.13 zeigt in doppeltlogarithmischer Darstellung den Zusammenhang zwischen der Reynolds-Zahl (\propto Durchfluss) und dem dimensionslosen Druckgradienten. Es sei darauf hingewiesen, dass hier der Druckgradient ohne Verwendung der Geschwindigkeit skaliert wurde, da diese direkt mit dem Durchfluss zusammen hängt (oft wird in der Strömungsmechanik jedoch die Geschwindigkeit bei der Skalierung von Drücken verwendet).

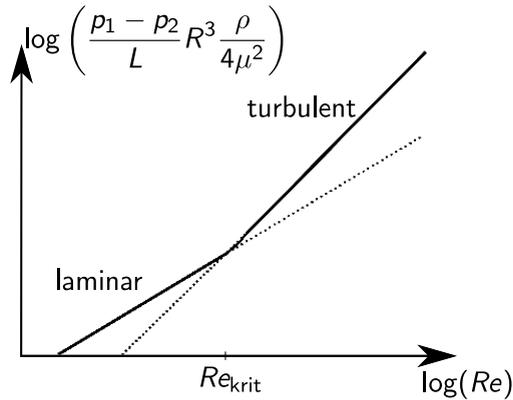


Abbildung 1.13: Rohrströmung: dimensionsloser Druckgradient als Funktion der Reynolds-Zahl.

Kapitel 2

Statik

In der Statik befassen wir uns mit der Druckverteilung in „schweren“ Fluiden, also in Fluiden unter der Wirkung der Schwerkraft. Die Fluide befinden sich dabei im Ruhezustand. Man spricht gelegentlich auch von **Hydrostatik**, wenn es sich um Flüssigkeiten, und von **Aerostatik**, wenn es sich um Gase (insbesondere Luft) handelt.

2.1 Spannungszustand in ruhenden Fluiden

Zunächst untersuchen wir die Richtungsabhängigkeit des Spannungszustands in einem ruhenden Fluid. Dazu betrachten wir ein Prisma, dessen Stirnflächen orthogonal zu den Prismenkanten stehen. Abbildung 2.1 zeigt die Seitenansicht des Prismas und die verwendeten Größenbezeichnungen für die Kantenlängen und die Normalspannungen p_x, p_y und p_α (beachte: im Ruhezustand wirken keine Tangentialspannungen). Auf das Prisma wirken Volumen- und Oberflächenkräfte:

- **Volumenkräfte:** Volumenkräfte, zum Beispiel die Schwerkraft, skalieren mit dem Volumeninhalt des betrachteten Körpers. Im Fall der Schwerkraft ergibt das mit der Schwerebeschleuni-

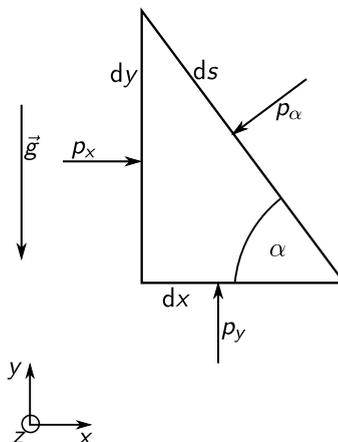


Abbildung 2.1: Prisma mit Normalspannungen.

gung g und der Dichte ρ den folgenden Zusammenhang:

$$\frac{1}{2}g\rho dx dy dz \propto dx dy dz, \quad (2.1)$$

- **Oberflächenkräfte:** Hier betrachten wir nur Ruhezustände, weshalb die tangential zur Oberfläche wirkenden Reibungsspannungen verschwinden, es treten nur die Normalspannungen p_x, p_y und p_α auf. Exemplarisch geben wir die Kraft auf die linke Seite an:

$$p_x dy dz \propto dy dz. \quad (2.2)$$

Folgerungen

- Oberflächenkräfte sind eine Größenordnung größer als Volumenkräfte. Für verschwindendes Prismenvolumen verschwinden Volumenkräfte schneller als Oberflächenkräfte.
- Im Gleichgewicht gilt daher für verschwindendes Prismenvolumen, dass bereits die vektorielle Summe allein der Oberflächenkräfte Null sein muss.
- Die Oberflächenkräfte stehen jeweils senkrecht auf den Oberflächen, daher ähnelt das Krätedreieck der Oberflächenkräfte dem Prismenquerschnitt (siehe Abbildung 2.2).
- Die Oberflächenkräfte sind proportional zu den jeweiligen Flächen, daraus folgt: Die Normalspannungen sind auf allen Prismenseiten gleich.

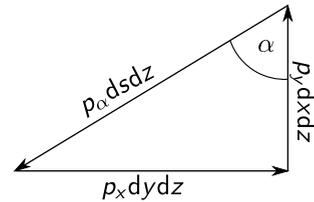


Abbildung 2.2: Kräftegleichgewicht am Prisma: Krätedreieck ähnlich zum Prismenquerschnitt aus Abbildung 2.1.

An einem Ort in einem ruhenden Fluid sind die Normalspannungen in jede Richtung gleich groß (Pascal).

- Im Ruhezustand genügt eine einzige Größe zur Angabe des Spannungszustandes an einem Ort. Dies ist der Druck:

$$\text{Druck } p, \quad [p] = \text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}. \quad (2.3)$$

Dies gilt auch in reibungsfrei strömenden Fluiden, da in diesen keine Reibungsspannungen, insbesondere keine Tangentialspannungen, wirken und damit alle hier getroffenen Annahmen ebenfalls erfüllt sind.

2.2 Hydrostatischer Druck

Als nächstes untersuchen wir den Einfluss einer Volumenkraft auf die Druckverteilung in einem ruhenden Fluid. Als Beispiel wählen wir die in negativer z -Richtung wirkende Schwerkraft. Dazu betrachten wir die Kräfte, die auf ein in dem ruhenden Fluid liegendes Fluidvolumen in der Gestalt eines Zylinders wirken. Dies tun wir zum einen für ein Zylindervolumen mit horizontaler Achse (senkrecht zur z -Achse) und zum anderen für einen Zylinder mit Achse in z -Richtung.

Horizontaler Zylinder Betrachtet wird ein horizontal orientierter Zylinder, wie er in Abbildung 2.3 dargestellt ist. Auf den Zylinder wirkt die Schwerkraft als Volumenkraft in z -Richtung. Die Drücke p_1 und p_2 , die eine Kraft in x -Richtung auf die kreisförmigen Stirnflächen ausüben, sind gleich groß. Begründung:

- Druckkräfte auf den Zylindermantel und die Schwerkraft haben keine Komponente in x -Richtung,
 \Rightarrow die Druckkräfte auf die Stirnflächen heben sich auf.
- Für verschwindende Querschnittsfläche folgt $p_1 = p_2 = p$. Dies gilt auch für andere horizontale Orientierungen:

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow p = p(z). \quad (2.4)$$

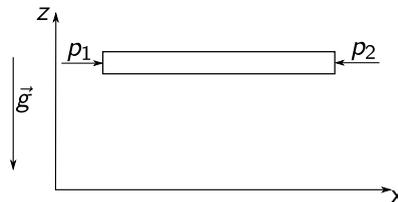
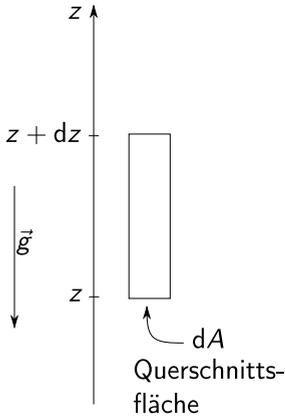


Abbildung 2.3: Horizontaler Zylinder.

Vertikaler Zylinder Am vertikalen Zylinder des Volumens $dV = dA \cdot dz$ liefert das Gleichgewicht von Druck- und Volumenkräften (vgl. Abbildung 2.4):

$$[p(z) - p(z + dz)] \approx -\frac{dp}{dz} dz = \frac{F dV}{dA} = \rho g dz. \quad (2.5)$$



Hier bezeichnet $F = \rho g$ eine spezifische Kraft, genauer eine Kraft pro Volumen. Die Verwendung spezifischer Kräfte ist in der Strömungsmechanik üblich, da i.A. keine festen Volumina mit definierten Massen betrachtet werden. Für die Änderung des Drucks in z -Richtung ergibt sich schließlich:

$$\boxed{\frac{dp}{dz} = -\rho g} \quad (2.6)$$

bzw.

$$\boxed{p(z) = p_0 - \int_{z_0}^z \rho g dz, \quad p_0 = p(z_0).} \quad (2.7)$$

Falls die Dichte ρ als konstant angenommen werden kann, vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$p(z) = p_0 - \rho g(z - z_0). \quad (2.8)$$

Die Schwerkraft verursacht einen allseitig richtungslosen Druck, der linear nach unten zunimmt.

Abbildung 2.4: Vertikaler Zylinder.

In unserem Beispiel gilt:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \quad (2.9)$$

Allgemein gilt im Gleichgewicht mit einer Kraft \vec{F} (pro Volumen) entsprechend:

$$\nabla p = \vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Für den Druck als stetig differenzierbare Funktion des Ortes gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x}, \text{ usw.} \\ \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{\partial F_y}{\partial x} &= \frac{\partial F_x}{\partial y} \\ \frac{\partial F_z}{\partial y} &= \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} &= \frac{\partial F_z}{\partial x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{rot } \vec{F} = 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Das Vektorfeld \vec{F} ist also ein konservatives Kraftfeld, denn mit der Vektoridentität $\text{rot}(\text{grad } u) \equiv 0$ folgt, dass es ein Potential U gibt mit $\nabla U = \vec{F}$. Somit gilt:

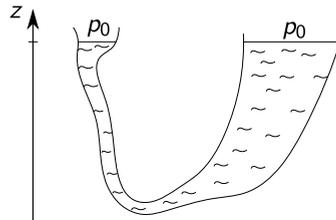
$$\text{grad } U = \text{grad } p \quad \text{bzw.} \quad U - p = \text{const.} \quad (2.13)$$

In ruhenden Fluiden ist Gleichgewicht nur möglich, falls die äußeren Kräfte konservativ sind, also ein Potential U haben.

2.2.1 Beispiele

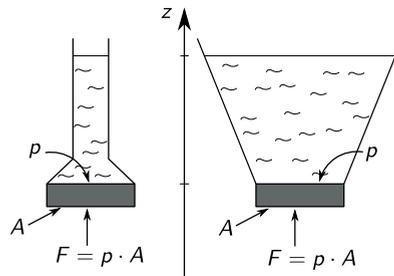
i) kommunizierende Röhren:

Der Druck hängt nur von z ab, die Flüssigkeitsspiegel liegen auf gleicher Höhe.



ii) Pascal'sches (hydrostatisches) Paradoxon:

Druck am Gefäßboden hängt nur von Flüssigkeitshöhe ab. Bei gleicher Flüssigkeitshöhe und Stempelfläche A ist gleiche Kraft F erforderlich, um Stempel zu halten.



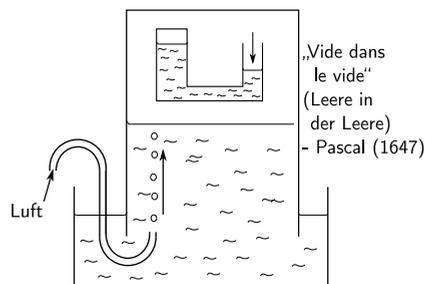
iii) Barometer:

Vorstellung vor dem 17. Jahrhundert:

Die Natur „scheut“ das Vakuum (*horror vacui*), deshalb steigt Quecksilber im Barometer. Die Steighöhe wird als Maß der Scheu gesehen.

Pascal (1647): experimentiert mit zwei Barometern. Das zweite wird im evakuierten Raum des ersten platziert. Nach Luftzufuhr

in den leeren Raum des ersten Barometers beginnen sich die anfänglich gleichen Schenkelhöhen im zweiten Barometer zu unterscheiden. Pascal zeigt: Es ist der Luftdruck - nicht der *horror vacui* - der das Quecksilber im Barometer steigen lässt.

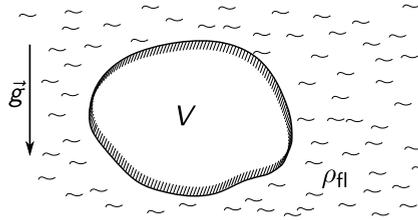


iv) Auftrieb:

Auftrieb: Kraft, die ein untergetauchter Körper durch Flüssigkeitsdrücke erfährt.

Gedankliche Vorgehensweise:

- ersetze Körper durch Flüssigkeit,
- Flüssigkeit im Gleichgewicht \Rightarrow resultierende Druckkraft F_p entspricht der Volumenkraft, $F_p = \rho_{fl} V g$,
- betrachte Flüssigkeit als erstarrt. Es gilt weiterhin: $F_p = \rho_{fl} V g$,
- ersetze „erstarrtes“ Volumen durch Körper anderer Dichte. Weiterhin gilt: $F_p = \rho_{fl} V g$.



Ein in eine Flüssigkeit eingetauchter Körper verliert so viel seines Gewichts, wie die verdrängte Flüssigkeit wiegt (Archimedes).

2.3 Druckverteilung in der Atmosphäre

Wir betrachten hier den unteren Teil der Atmosphäre, die **Troposphäre**. An den Polen ist diese etwa 7 km hoch, am Äquator circa 14 km. In diesem Bereich beobachtet man folgenden Zusammenhang zwischen Druck und Dichte:

$$p\rho^{-n} = \text{const} = p_0\rho_0^{-n}, \quad \text{„polytrope Atmosphäre“}. \quad (2.14)$$

Hierbei bezeichnet der Index 0 einen Bezugszustand und n den **Polytropenexponenten** mit $n \approx 1, 2$. Für andere Werte von n ergeben sich z.B.:

- $n = 1$: **isotherme** Schichtung (Boyle-Mariotte),
- $n = c_p/c_V$: **adiabatische** Schichtung. Hierbei bezeichnen c_p und c_V die spezifischen Wärmekapazitäten bei konstantem Druck bzw. konstantem Volumen.

Außerdem gilt die thermische Zustandsgleichung:

$$p = \rho RT. \quad (2.15)$$

R ist die spezifische Gaskonstante. Für mittelfeuchte Luft beträgt ihr Wert in etwa $R \approx 288 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2\text{K}}$. T bezeichnet die absolute Temperatur. Elimination von ρ aus

Gleichung (2.14) mithilfe der thermischen Zustandsgleichung erlaubt eine Aussage über den Zusammenhang zwischen Druck und Temperatur in der Atmosphäre:

$$p\rho^{-n} = p \left(\frac{p}{RT} \right)^{-n} = p^{1-n} R^n T^n = p_0^{1-n} R^n T_0^n \quad (2.16)$$

$$\Rightarrow \frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{n-1}{n}}, \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{n}{n-1}}. \quad (2.17)$$

Das totale Differential des Drucks liefert:

$$\frac{dp}{p_0} = \frac{n}{n-1} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{1}{n-1}} \frac{dT}{T_0}. \quad (2.18)$$

$$\text{Es war: } \frac{dp}{dz} = -\rho g \stackrel{\text{therm. Zustandsgl.}}{=} -\frac{pg}{RT} = -\frac{p_0 g}{RT_0} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{1}{n-1}}. \quad (2.19)$$

Vergleich von Gleichung (2.18) und (2.19) liefert:

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{n-1}{n} \frac{g}{R} \quad (2.20)$$

$$\Rightarrow \boxed{T = T_0 - \frac{n-1}{n} \frac{g}{R} (z - z_0)}, \quad T_0 = T(z = 0). \quad (2.21)$$

Wir halten fest, dass die Temperatur linear nach oben hin abnimmt, der sich ergebende Temperaturabfall kann nun berechnet werden:

- $n = 1, 2$, polytrope Schichtung: $\Delta T \approx 0,6\text{K}$ auf 100m,
- $n = 1, 4$, adiabatische Schichtung: $\Delta T \approx 1\text{K}$ auf 100m.

Mit T/T_0 nach Gleichung (2.21) folgt aus Gleichung (2.16):

$$\boxed{\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{n}{n-1}} = \left[1 - \frac{n-1}{n} \frac{g}{RT_0} (z - z_0) \right]^{\frac{n}{n-1}}}. \quad (2.22)$$

Für kleine $\Delta z = z - z_0$ kann die Atmosphäre lokal als isotherm betrachtet werden. Dann gilt:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \Rightarrow \frac{dp}{dz} = -\rho g = -\rho_0 \frac{p}{p_0} g \quad (2.23)$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} g dz \quad (2.24)$$

$$\Rightarrow \frac{p}{p_0} = \exp \left(-\frac{\rho_0}{p_0} g (z - z_0) \right). \quad (2.25)$$

Mit der Definition der **Skalenhöhe** (*scale height*) H ,

$$H := \frac{p_0}{\rho_0 g}, \quad (2.26)$$

(auf der Erdoberfläche $H \approx 8000$ m) ergibt sich die **barometrische Höhenformel**:

Barometrische Höhenformel

$$\frac{p}{p_0} = \exp\left(-\frac{z - z_0}{H}\right). \quad (2.27)$$

Über einen Höhenunterschied von $\Delta z = H$ fällt der Druck um $1/e$. Sind die Höhenunterschiede $z - z_0$ klein, so lässt sich die Exponentialfunktion über Reihenentwicklung bis zum linearen Term annähern ($e^x \approx 1 + x$):

$$\frac{p}{p_0} \approx 1 - \frac{z - z_0}{H}, \quad (2.28)$$

$$p \approx p_0 - \rho_0 g (z - z_0). \quad (2.29)$$

Dies entspricht der hydrostatischen Druckverteilung in Fluiden konstanter Dichte.

2.3.1 Stabilität in der Atmosphäre

Nachdem der Druckverlauf in der Atmosphäre bestimmt wurde, bleibt zu untersuchen, ob Schichtungen in der Atmosphäre stabil sind. Ausgangspunkt ist die Situation in Abbildung 2.5, in der eine Luftmasse aus einer niedrigen in eine höhere Luftschicht gehoben wird. Solche Verschiebungen treten aufgrund von Windböen in der Natur auf. Da diese Prozesse vergleichsweise schnell von statten gehen, findet praktisch kein Wärmeaustausch statt, d.h., die Zustandsänderung ist adiabatisch. Für Stabilität genügt es nicht, dass die Dichte der Luft nach oben abnimmt. Stabil ist die Atmosphäre nur, wenn eine aufsteigende Luftmasse nach adiabatischer Zustandsänderung am neuen Ort z_2 eine größere Dichte $\rho_{2,ad}$ besitzt als die umgebende polytrop geschichtete Luft (Dichte $\rho_{2,pol}$):

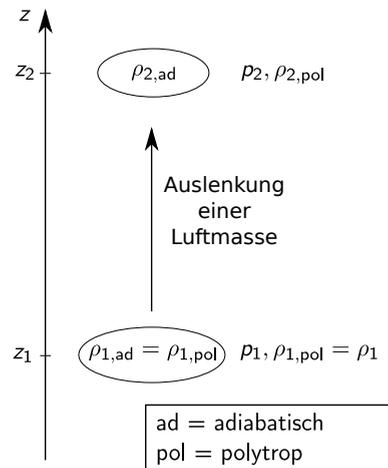


Abbildung 2.5: Auslenkung einer Luftmasse von einer niedrigeren in eine höhere Luftschicht.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Stabilität} \\ \text{Instabilität} \end{array} \right\} \text{ für } \left\{ \begin{array}{l} \rho_{2,ad} > \rho_{2,pol}, \\ \rho_{2,ad} < \rho_{2,pol}. \end{array} \right.$$

Der Druckausgleich ist ein schneller Prozess, so dass auch in der nach oben verlagerten Luftmasse der zur Höhe z_2 gehörende atmosphärische Druck p_2 herrscht. Damit erhält man für die Dichten in polytroper (atmosphärischer) Schichtung bzw. bei adiabatischer Zustandsänderung (Böe):

$$\text{polytrop: } \frac{\rho_{2,\text{pol.}}}{\rho_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad (2.30)$$

$$\text{adiabatisch: } \frac{\rho_{2,\text{ad.}}}{\rho_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\kappa}}, \quad \kappa := \frac{c_p}{c_V}, \quad (2.31)$$

wobei κ den Adiabatenkoeffizienten bezeichnet. Der Vergleich liefert:

$$\frac{\rho_{2,\text{pol.}}}{\rho_{2,\text{ad.}}} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{n} - \frac{1}{\kappa}} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa - n}{n \cdot \kappa}}. \quad (2.32)$$

Falls $p_2/p_1 < 1$ folgt $\rho_{2,\text{ad}} > \rho_{2,\text{pol}}$ für $\kappa > n$. Stabilität liegt also vor, falls $n < \kappa$. Dies ist insbesondere der Fall für:

- $n = 1$: isotherme Atmosphäre,
- $n < 1$: mit Gleichung (2.21) folgt $dT/dz > 0$, also Temperaturzunahme nach oben (Inversion). Dies kann an kalten Wintertagen auftreten und führt zu besonders stabilen Verhältnissen. Aufsteigender Rauch steigt beispielsweise nicht über eine gewisse Höhe, sondern wird wie von einem unsichtbaren Deckel in den unteren Luftschichten gehalten, vgl. Abbildung 2.6. In Städten macht sich das als Smog bemerkbar.



Abbildung 2.6: Inversion bei Lochcarron, Schottland, (JohanTheGhost, CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons).

Kapitel 3

Kinematik

Die Kinematik dient der Beschreibung von Bewegungsformen in strömenden Fluiden, ohne dabei die Kräfte, die diese Bewegungen verursachen, zu berücksichtigen. Dabei spielen vor allem Ort, Zeit und Geschwindigkeit eine wichtige Rolle. Es werden verschiedene Schreibweisen verwendet:

$$\text{Ortsvektor: } \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{Koordinaten } x, y, z \text{ auch als } x_i, i = 1, 2, 3, \quad (3.1)$$

$$\text{Geschwindigkeit: } \vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad \text{Komponenten } u, v, w \text{ auch als } u_i, i = 1, 2, 3. \quad (3.2)$$

Außerdem werden gelegentlich Ableitungen in Kurzform dargestellt und die einfache Form der **Einstein'schen Summenkonvention** verwendet, z.B.:

$$\text{div } \vec{u} = \nabla \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \partial_x u + \partial_y v + \partial_z w = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = u_{i/i}. \quad (3.3)$$

3.1 Betrachtungsweisen

3.1.1 Euler- und Lagrange-Koordinaten

Strömungen lassen sich aus verschiedener Sicht beschreiben. Zum einen kann man verfolgen, wie sich die Eigenschaften (z.B. Ort, Geschwindigkeit) einzelner Fluidteilchen ändern, während sich diese mit der Strömung mitbewegen. Dies ist die **Lagrange'sche Betrachtungsweise**. Zum anderen kann man die Vorgänge im Strömungsfeld von einem festen Ort aus beobachten. Dies ist die **Euler'sche Betrachtungsweise**. Die beiden Betrachtungsweisen sind in Abbildung 3.1 skizziert und wie folgt charakterisiert:

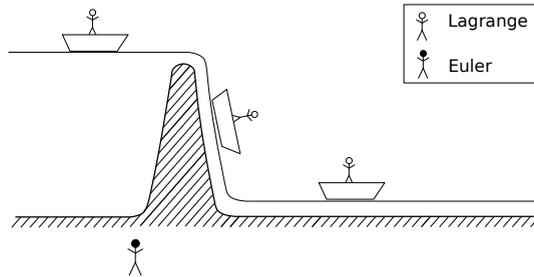


Abbildung 3.1: Boot treibt mit der Strömung: Euler'sche (hier stationäre Strömung) und Lagrange'sche Betrachtungsweise (hier instationäre Strömung).

Lagrange'sche Betrachtungsweise:

- Vorgehensweise wie in der Punktmechanik, einzelne Fluidteilchen werden verfolgt,
- Kennzeichnung über Nummerierungskordinaten a_k , $k = 1, 2, 3$ (diese werden auch **Lagrange-Koordinaten** genannt und können z.B. durch den Ort des Fluidteilchens zu einer bestimmten Zeit t_0 gegeben sein),
- Ort $x_i = x_i(a_k, t)$, Druck $p = p(a_k, t)$, Dichte $\rho = \rho(a_k, t)$,
- Geschwindigkeit gegeben durch lokale Zeitableitung: $u_i = \partial_t x_i(a_k, t)$
 \Rightarrow räumliche Gradienten sind nicht sofort klar, werden aber gebraucht, z.B. $\partial_y u$ bei der Bestimmung von Schubspannungen ($\tau = \mu \partial_y u$).

Euler'sche Betrachtungsweise:

- Vorgehensweise entspricht der in der Feldtheorie üblichen,
- am Ort x_i zur Zeit t : $u_k = u_k(x_i, t)$, $p = p(x_i, t)$, $\rho = \rho(x_i, t)$.

Strömungen können **stationär** oder **instationär** sein. Wir betrachten dazu Abbildung 3.2. Es gibt zwei verschiedene Euler'sche Betrachtungsweisen:

- Euler auf dem Boot: sieht stationäres Wellensystem,
- Euler am Ufer: sieht instationäres Wellensystem.

Eine Strömung ist stationär \Leftrightarrow es gibt keine Zeitabhängigkeit im Euler'schen Koordinatensystem.

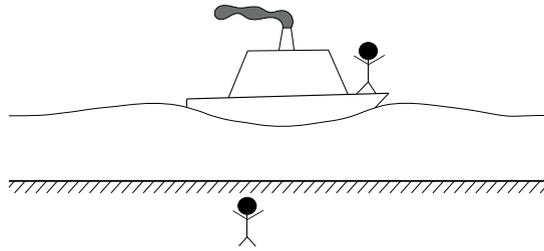


Abbildung 3.2: Zwei Beobachter in Euler'schen Koordinaten: Einer am Ufer und einer auf dem fahrenden wellenerzeugenden Boot.

3.1.2 Bahn-, Strom- und Streichlinien

Bewegungen in Strömungsfeldern können über Bahn-, Strom- und Streichlinien beschrieben werden. Abbildung 3.3 zeigt den Unterschied zwischen diesen Linien am Beispiel von aus einem Schornstein austretendem Rauch bei nachlassendem Wind. Im Folgenden werden die einzelnen Linienarten erläutert.

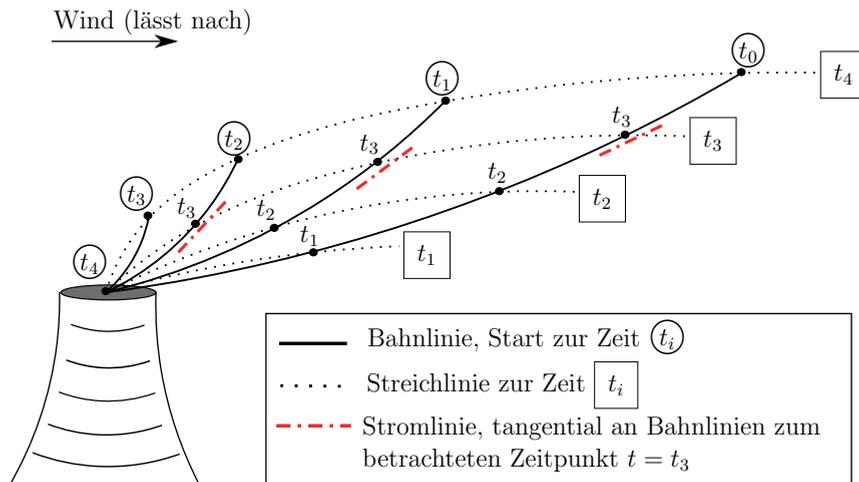


Abbildung 3.3: Darstellung von Bahn-, Strom- und Streichlinien am Beispiel von aus einem Schornstein austretendem Rauch bei nachlassendem Wind.

Bahnlinien (*path lines*) sind Trajektorien von Fluidteilchen. Man erhält sie quasi als Zeitaufnahme eines Fluidteilchens. Praktisch lässt sich dies durch Zufügen kleiner Teilchen realisieren, die der Strömung nahezu trägheitslos folgen. Beachte:

Fluidteilchen, die zu verschiedenen Zeiten denselben Ort passieren, können unterschiedliche Bahnlinien durchlaufen.

Stromlinien (*stream lines*) sind Integralkurven des momentanen Geschwindigkeitsfeldes. Jedes Linienelement $d\vec{s} = (dx, dy, dz)^T$ der Stromlinie ist parallel zum lokalen Geschwindigkeitsvektor $\vec{u}(\vec{x}, t)$. Deshalb gilt:

$$d\vec{s} \times \vec{u} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad \text{oder} \quad u : v : w = dx : dy : dz. \quad (3.4)$$

Beachte: Stromlinien können sich nicht schneiden.

Streichlinien (*streak lines*) geometrischer Ort aller Fluidteilchen, die in einem betrachteten Zeitintervall einen bestimmten Ort passiert haben. Im Beispiel der Abbildung 3.2 ist dies die sichtbare Rauchfahne. Da hier ein nachlassender Wind angenommen wurde, steigt hier die Rauchfahne mit der Zeit.

Beachte: Wenn an einem Ort der Strömung Teilchen zugeführt werden, um den Verlauf der Strömung zu visualisieren (z.B. ein Tintenfaden in die Rohrströmung), so sieht man immer die Streichlinien. Es gilt:

In stationärer Strömung sind Bahn-, Strom- und Streichlinien identisch.

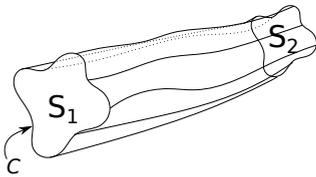


Abbildung 3.4: Stromröhre, C ist die generierende geschlossene Kurve.

Stromröhren (*stream tubes*) Die Oberfläche einer Stromröhre wird von allen Stromlinien gebildet, die durch eine ganz im Fluid liegende, geschlossene Kurve C verlaufen (vgl. Abbildung 3.4).

Stromfäden (*stream filaments*) entsprechen Strömerröhren mit verschwindend kleiner Querschnittsfläche, sodass der Zustand der Strömung auf der Querschnittsfläche als konstant angenommen werden kann.

Die eine Stromröhre oder einen Stromfaden begrenzenden Stromlinien können sich nicht schneiden. In stationärer Strömung liefert die Bedingung der Massenerhaltung für kleine Querschnitte (über die hinweg der Zustand als konstant angesehen werden kann):

$$\rho_1 u_1 S_1 = \rho_2 u_2 S_2 = \text{const.} \quad (3.5)$$

In inkompressibler Strömung ($\rho = \text{const}$) folgt

$$u_1 S_1 = u_2 S_2 \quad \Rightarrow \quad u \propto \frac{1}{S}. \quad (3.6)$$

Aus einem Stromlinienbild einer inkompressiblen Strömung kann man daher folgendes ableiten:

- konvergierende Stromlinien: Strömung wird beschleunigt
- divergierende Stromlinien: Strömung wird verzögert

3.1.3 Substantielle Zeitableitung

In Euler'schen Koordinaten wird die zeitliche Änderung einer physikalischen Größe, z.B. der Temperatur T , am Ort x_i gesucht. In einem Strömungsfeld muss man dabei unterscheiden zwischen der Änderung der Temperatur eines Fluidteilchens

- in seiner augenblicklichen Umgebung,
- weil das Fluidteilchen in ein Gebiet mit anderer Temperatur kommt.

Dies wird im Folgenden zuerst für skalare und dann für vektorielle Größen gezeigt.

- i) skalare Größen, z.B. die Temperatur $T(x_i, t)$: die Ableitung erhält man über die totale Zeitableitung, wobei zu beachten ist, dass die zeitliche Änderung des Ortes gerade der Geschwindigkeit entspricht:

$$\frac{dT(x_i, t)}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial T}{\partial x_i} \cdot u_i \quad (3.7)$$

$$= T_{/t} + T_{/i} \cdot u_i. \quad (3.8)$$

Gleichung (3.8) zeigt die Zeitableitung auch einmal in bequemer Indexschreibweise mit Summenkonvention. Dies ist die substantielle Zeitableitung (*material* oder *substantial derivative*). Sie setzt sich aus lokaler und konvektiver Zeitableitung zusammen und wird nach Stokes auch (vor allem in der englischen Literatur) mit DT/Dt bezeichnet:

Substantielle Zeitableitung

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \text{grad } T =: \frac{DT}{Dt}. \quad (3.9)$$

- ii) vektorielle Größen, z.B. ein Vektor $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)^T$: Hier folgt für die einzelnen Komponenten analog:

$$\frac{db_1}{dt} = \partial_t b_1 + \vec{u} \cdot \text{grad } b_1, \text{ u.s.w., also} \quad (3.10)$$

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \partial_t \vec{B} + (\vec{u} \cdot \text{grad}) \vec{B}. \quad (3.11)$$

Beachte: $(\vec{u} \cdot \text{grad}) \vec{B}$ entspricht bis auf Normierung der Richtungsableitung von \vec{B} in Richtung \vec{u} . Für den Spezialfall $\vec{B} = \vec{u}$ erhält man die

Substantielle Beschleunigung

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \text{grad}) \vec{u} = \partial_t \vec{u} + \text{grad} \left(\frac{u^2}{2} \right) - \vec{u} \times \text{rot } \vec{u}. \quad (3.12)$$

Auf der rechten Seite wurde der Term $(\vec{u} \cdot \text{grad}) \vec{u}$ noch mittels einer vektoriellen Identität in eine später gelegentlich verwendete Form umgewandelt. Die substantielle Beschleunigung geht in die Bewegungsgleichungen der Strömungsmechanik ein. Sie hängt, wie Gleichung (3.12) zeigt, in nichtlinearer Weise von der Geschwindigkeit \vec{u} ab. Dies gestaltet die Lösung der Gleichungen oft schwierig.

3.2 Kontinuitätsgleichung und Stromfunktion

Reynolds'sches Transporttheorem (RTT) Zur Herleitung der Kontinuitätsgleichung betrachten wir zunächst ganz allgemein, wie sich eine in einem zeitlich

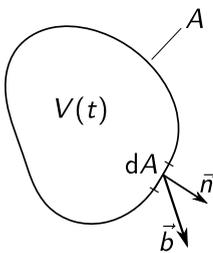


Abbildung 3.5: Kontrollvolumen $V(t)$ mit Oberfläche $A(t)$, sowie Oberflächenelement dA mit Normalenvektor \vec{n} und Geschwindigkeit \vec{b} .

variablen Kontrollvolumen befindliche extensive Größe mit der Zeit ändert. In der Strömungsmechanik sind als extensive Größen Masse, Impuls und Energie von Interesse. Zugehörige intensive Größen sind die Massen-, Impuls- und Energiedichte (hier jeweils bezogen auf das Volumen). Man erhält die extensive Größe durch Integration der zugehörigen intensiven Größe χ über ein Kontrollvolumen. Die zeitliche Änderung der extensiven Größe zu einer Zeit t_0 ist dann gegeben durch:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \chi dV. \quad (3.13)$$

Es gibt zwei Beiträge, die zu einer Änderung der extensiven Größe beitragen:

- $\partial\chi/\partial t \, dV$: Änderungsrate im Volumenelement dV zur Zeit t_0 ,
- $\chi \vec{b} \cdot \vec{n} \, dA$: Änderungsrate aufgrund der sich mit Geschwindigkeit \vec{b} bewegenden Oberfläche (vgl. Abbildung 3.5).

Im Rahmen der Strömungsmechanik interessiert die zeitliche Änderung von Eigenschaften einer definierten Fluidmasse. Wir betrachten deshalb im Folgenden Kontrollvolumina, die materiell gebunden sind. Die Oberfläche eines solchen Volumens bewegt sich mit der lokalen Strömungsgeschwindigkeit, d.h., $\vec{b} = \vec{u}$. Für die zeitliche Änderung der extensiven Größe ergibt sich damit ein Zusammenhang, der bekannt ist als

Reynolds'sches Transporttheorem

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \chi \, dV = \int_{V(t)} \frac{\partial \chi}{\partial t} \, dV + \int_{A(t)} \chi \, \vec{u} \cdot \vec{n} \, dA. \quad (3.14)$$

Die Integrationsgrenzen der Integrale auf der rechten Seite der Gleichung (3.14) unterliegen nicht mehr der Zeitableitung. Daher können wir das Kontrollvolumen auch als raumfestes Kontrollvolumen betrachten, das mit der Geschwindigkeit $\vec{u}(\vec{x}, t)$ durchströmt wird.

Kontinuitätsgleichung Wir identifizieren nun die intensive Größe χ mit der Massendichte ρ und betrachten ein materiell gebundenes Kontrollvolumen V . Dann ist die extensive Größe gerade die Masse im Volumen. Da Masse im Volumen nicht einfach entstehen oder verschwinden kann, ist die Masse in V zeitlich konstant und wir erhalten mit dem Reynolds'schen Transporttheorem:

$$0 = \frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV = \int_V \partial_t \rho \, dV + \int_A \rho \vec{u} \cdot \vec{n} \, dA \quad (3.15)$$

$$(\text{Satz von Gauß}) \Rightarrow = \int_V \partial_t \rho \, dV + \int_V \operatorname{div}(\rho \vec{u}) \, dV \quad (3.16)$$

$$\Rightarrow \int_V [\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \vec{u})] \, dV = 0. \quad (3.17)$$

Da das Volumen hier beliebig wählbar ist, folgt, dass bereits der Integrand verschwinden muss. Man erhält die Kontinuitätsgleichung in differentieller Form:

Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0, \quad (3.18)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{u} = 0. \quad (3.19)$$

Für die untere Form der Kontinuitätsgleichung wurde ausgenutzt, dass $\operatorname{div}(\rho\vec{u}) = \vec{u} \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \vec{u}$, und $\partial\rho/\partial t + \vec{u} \operatorname{grad} \rho = D\rho/Dt$, also der substantiellen Zeitableitung entspricht. Für inkompressible Strömungen gilt außerdem $\rho = \text{const}$, man erhält die

Kontinuitätsgleichung für inkompressible Fluide

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad \rho = \text{const.} \quad (3.20)$$

Stromfunktion ψ (*stream function*) An dieser Stelle bietet es sich an, die Stromfunktion ψ einzuführen, die später gebraucht wird. Für beliebige Vektorfelder \vec{B} gilt die Identität $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = 0$. Ein Vergleich mit der Kontinuitätsgleichung zeigt, dass diese erfüllt wird für

$$\text{inkompressible Strömungen mit} \quad \vec{u} = \operatorname{rot} \vec{B}, \quad (3.21)$$

$$\text{kompressible, stationäre Strömungen mit} \quad \rho\vec{u} = \operatorname{rot} \vec{B}. \quad (3.22)$$

\vec{B} ist ein Vektorpotential. Dies kann in zweidimensionalen Strömungen nützlich sein, da dann nur eine Komponente des Vektorpotentials \vec{B} wichtig ist. Für zweidimensionale, inkompressible Strömungen gilt aufgrund der Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (3.23)$$

Dies wird für eine Funktion ψ , die **Stromfunktion**, erfüllt mit

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3.24)$$

Dies entspricht

$$\vec{u} = \operatorname{rot} \vec{B} \quad \text{mit} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Es ist

$$d\psi = \partial_x \psi \, dx + \partial_y \psi \, dy = -v \, dx + u \, dy. \quad (3.26)$$

Das totale Differential verschwindet entlang einer Stromlinie, da dort $dx/u = dy/v$, vgl. Gleichung 3.4. Es gilt also

$$\psi = \text{const längs Stromlinien.} \quad (3.27)$$

Dies gilt analog für $\rho\vec{u}$ in zweidimensionalen kompressiblen stationären Strömungen.

3.3 Drehung, Wirbelvektor, Zirkulation

In Abbildung 3.6 ist eine Parallelströmung zwischen zwei Wänden dargestellt. Die untere Wand befindet sich in Ruhe, die obere Wand bewegt sich mit einer Geschwindigkeit u nach rechts. An den Wänden wird die Haftbedingung erfüllt. Im Fluid stellt sich ein lineares Geschwindigkeitsprofil ein. Eine solche Strömung wird **Couette-Strömung** genannt. Wir werden später sehen, dass das lineare Geschwindigkeitsprofil eine exakte Lösung der Bewegungsgleichungen (Navier-Stokes-Gleichungen) ist. Hier wollen wir untersuchen, ob in dieser Scherströmung Drehung vorhanden ist. Dazu betrachten wir (gedachte) Zeiger, die mit unterschiedlicher Orientierung in die Strömung gebracht werden. In horizontaler Lage wird der Zeiger seine Orientierung nicht ändern, während Zeiger, die unter einem anderen Winkel α eingebracht werden, eine Drehbewegung ausführen werden, da die Geschwindigkeiten an den Enden unterschiedlich sind. Die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\gamma}$ hängt daher vom Winkel α ab.

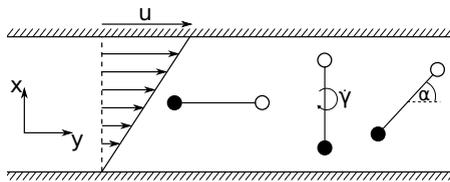


Abbildung 3.6: Drehung am Beispiel der Couette-Strömung.

Um die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\gamma}$ zu bestimmen, gehen wir wie in Abschnitt 1.2.1 vor, wo die Scherrate bestimmt wurde. Dazu betrachten wir in Abbildung 3.7a zunächst einen Zeiger der Länge $d\ell$ unter einem Winkel $\alpha = 90^\circ$ und ermitteln dafür die Winkelgeschwindigkeit. Der obere Kopf des Zeigers bewegt sich in einem kleinen Zeitintervall dt um $dx \approx \partial u / \partial y dy dt$ weiter nach rechts als der untere. Für kleine dt (und damit kleine Winkeländerungen $d\gamma \approx dx / dy$) erhalten wir wieder:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (3.28)$$

In einem weiteren Schritt führen wir die gleiche Betrachtung für einen Zeiger durch, der unter einem Winkel α liegt, vgl. Abbildung 3.7b. Die Vorgehensweise ist die gleiche, jedoch ist zu beachten, dass nun $dy = \sin \alpha d\ell$:

$$dx \approx \frac{\partial u}{\partial y} \underbrace{\sin \alpha \cdot d\ell}_{=dy} dt, \quad (3.29)$$

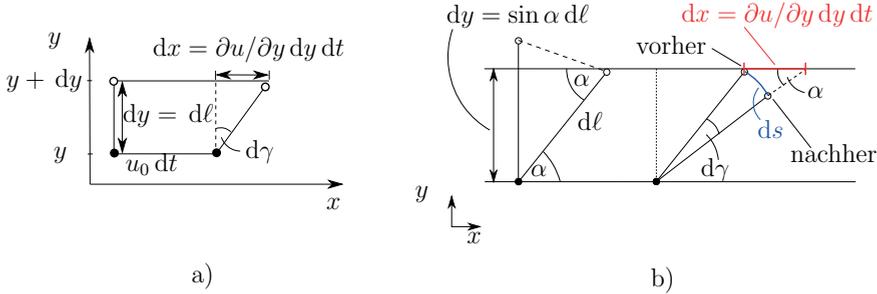


Abbildung 3.7: Geometrische Überlegungen zur Drehung.

$$ds = dx \cdot \sin \alpha \quad (3.30)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial y} \sin^2 \alpha \, dl \, dt, \quad (3.31)$$

$$d\gamma = \frac{ds}{dl} = \frac{\partial u}{\partial y} \sin^2 \alpha \, dt \quad (3.32)$$

$$\Rightarrow \frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial u}{\partial y} \sin^2 \alpha. \quad (3.33)$$

Im Mittel über alle α gilt dann mit dem Mittelwert $\langle \cdot \rangle$

$$\left\langle \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha \frac{\partial u}{\partial y} \, d\alpha \quad (3.34)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{4} \sin(2\alpha) \right]_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (3.35)$$

Für allgemeinere Fälle, in denen die Strömung nicht mehr parallel verläuft, betrachten wir exemplarisch Winkeländerungen in der xy -Ebene am Beispiel eines Rechtecks. Geschwindigkeitsänderungen in x - und y -Richtung verursachen in gleicher Weise wie zuvor eine Drehung der Seiten des Rechtecks um die Winkel $d\gamma_1$ und $d\gamma_2$, siehe Abbildung 3.8:

$$d\gamma_1 = \frac{\partial v}{\partial x} dt, \quad d\gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial y} dt. \quad (3.36)$$

Die mittlere Winkelgeschwindigkeit des Rechtecks um die z -Achse erhält man über die mittleren Winkelgeschwindigkeiten der beiden Rechteckseiten unter Beachtung, dass die Winkeländerung $d\gamma_2$ hier mathematisch negativ ist, zu

$$\left\langle \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = \frac{1}{2} \left(\left\langle \frac{d\gamma_1}{dt} \right\rangle - \left\langle \frac{d\gamma_2}{dt} \right\rangle \right) \quad (3.37)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.38)$$

$$= \frac{1}{2} (\text{rot } \vec{u})_z. \quad (3.39)$$

Für die anderen Drehachsen gilt dies analog und man erhält den folgenden allgemeinen Zusammenhang für die mittlere Winkelgeschwindigkeit:

$$\left\langle \vec{\dot{\gamma}} \right\rangle = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{u} =: \frac{1}{2} \vec{\omega}. \quad (3.40)$$

Die Rotation des Geschwindigkeitsvektors ist in der Strömungsmechanik eine wichtige Größe. Sie wird als **Wirbelvektor** (*vorticity*), oder auch als **Wirbel-dichtevektor**, bezeichnet:

$$\vec{\omega} = \text{rot } \vec{u}. \quad (3.41)$$

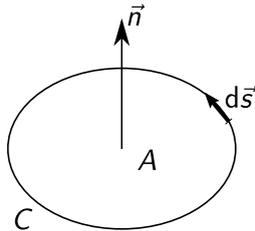


Abbildung 3.9: Zirkulation: Integrationsweg und -fläche.

Eine weitere Größe, die Drehungen im Strömungsfeld charakterisiert, ist die **Zirkulation** Γ oder **Wirbelstärke** (*circulation*). Diese erhält man, indem man die Geschwindigkeit entlang einer ganz im Fluid liegenden geschlossenen Kurve C integriert, siehe Abbildung 3.9:

$$\Gamma = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{s} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_A \text{rot } \vec{u} \cdot \vec{n} \, dA \Rightarrow \Gamma = \int_A \vec{\omega} \cdot \vec{n} \, dA. \quad (3.42)$$

Die Zirkulation ist nach dem Satz von Stokes auch das Integral des Wirbelvektors über die von der Kurve C umschlossene Fläche A mit der Flächennormalen \vec{n} . In der Darstellung der Zirkulation als Flächenintegral sieht man, dass der Wirbelvektor die Eigenschaft einer Dichte (Wirbelstärke pro Fläche) hat.

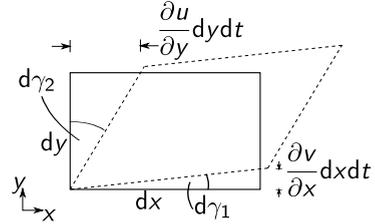


Abbildung 3.8: Zur Drehung eines Quaders.

Beispiele

i) geschlossene Stromlinie: $\oint_C \vec{u} \, d\vec{s} \neq 0$.

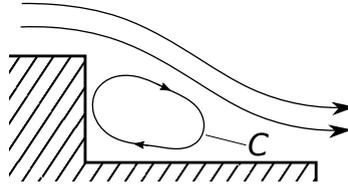


Abbildung 3.10: Wirbel im Totwasser hinter einer rückspringenden Stufe.

ii) Scherströmung: Stromlinien parallel, also insbesondere nicht geschlossen, dennoch $\Gamma = \oint_C \vec{u} \, d\vec{s} \neq 0$.

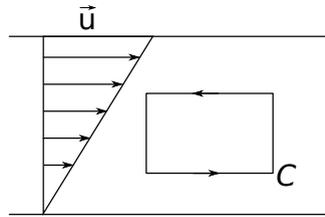


Abbildung 3.11: Drehungsbehaftete Scherströmung.

iii) Festkörperrotation: Bei Festkörperrotation mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\gamma}$ um die z-Achse gilt:

$$\vec{u}(r) = \vec{\gamma} \times \vec{r} \quad \text{oder} \quad v = \dot{\gamma} \cdot r \quad (\text{Zylinderkoordinaten}). \quad (3.43)$$

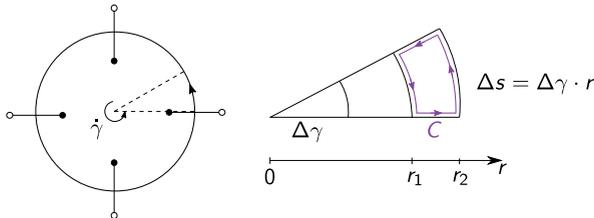


Abbildung 3.12: Zirkulation bei Festkörperrotation um die z-Achse.

Damit folgt für die Zirkulation längs einer Kurve C , die den Ursprung (Drehachse) nicht einschließt:

$$\Gamma = \oint_C \vec{u} \, d\vec{s} = \dot{\gamma} r_2 \Delta\gamma \cdot r_2 - \dot{\gamma} r_1 \Delta\gamma r_1 = \dot{\gamma} \Delta\gamma (r_2^2 - r_1^2) \quad (3.44)$$

$$= \int_A \vec{\omega} \vec{n} \, dA = \int_A \text{rot } \vec{u} \vec{n} \, dA \stackrel{r_1 \rightarrow r_2}{=} \underbrace{(\text{rot } \vec{u})_z}_{=\omega_z} \cdot \Delta\gamma r_1 (r_2 - r_1) \quad (3.45)$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_z = \dot{\gamma} \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1(r_2 - r_1)} \approx 2\dot{\gamma}} \quad \text{für } r_2 \rightarrow r_1. \quad (3.46)$$

Bei Festkörperrotation entspricht die z -Komponente des Wirbelvektors der doppelten Winkelgeschwindigkeit.

iv) **Potentialwirbel** (Tornado, Badewannenwirbel): Die azimutale Geschwindigkeit v sei gegeben durch:

$$v(r) = \frac{c}{r}, \quad c = \text{const.} \quad (3.47)$$

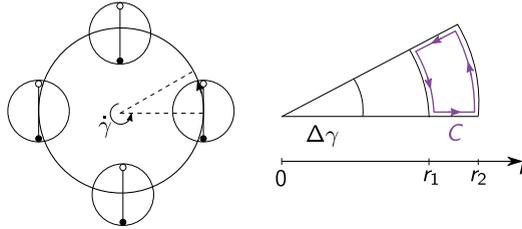


Abbildung 3.13: Zirkulation beim Potentialwirbel.

Beim Potentialwirbel verschwindet die Zirkulation längs einer geschlossenen Kurve, die den Ursprung nicht einschließt:

$$\Gamma = \oint_C \vec{u} \, d\vec{s} = \frac{c}{r_2} \Delta\gamma r_2 - \frac{c}{r_1} \Delta\gamma r_1 = 0 \quad (3.48)$$

$$\Rightarrow \text{rot } \vec{u} = 0. \quad (3.49)$$

Die Zeiger in Abbildung 3.13 ändern ihre Richtung beim Umlauf nicht. Für die Zirkulation längs einer Kurve (Kreis mit Radius R) um den Ursprung gilt dagegen unabhängig vom Radius

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} \frac{c}{R} \underbrace{R \, ds}_{d\gamma} = 2\pi c. \quad (3.50)$$

Am Ursprung, bei $r = 0$, besitzt der Potentialwirbel eine Singularität. Auch die Ableitung der Geschwindigkeit nach dem Radius divergiert für $r \rightarrow 0$ und daher ebenso die Tangentialspannung $\tau = \mu \partial_r v$. Dies führt in reibungsbehafteten Strömungen dazu, dass in einem „Kernbereich“ um den Ursprung die Geschwindigkeitsverteilung nicht mehr der eines Potentialwirbels entspricht. Stattdessen kommt es hier zu einem Übergang zu einer Geschwindigkeitsverteilung wie bei der Festkörperrotation.

$$\boxed{\text{Strömungen mit } \vec{\omega} = \text{rot } \vec{u} = 0 \text{ heißen drehungsfrei.}} \quad (3.51)$$

In Abbildung 3.14 wird die drehungsfreie Bewegung beim Potentialwirbel mit der drehungsbehafteten bei der Festkörperrotation verglichen. Dazu wird die Bewegung eines anfangs rechteckigen Fluidteilchens verfolgt. Im Fall der drehungsfreien Bewegung kommt es zu einer Verformung, die dergestalt ist, dass die mittlere Drehung verschwindet. Bei der Festkörperrotation dreht sich dagegen das Fluidteilchen.

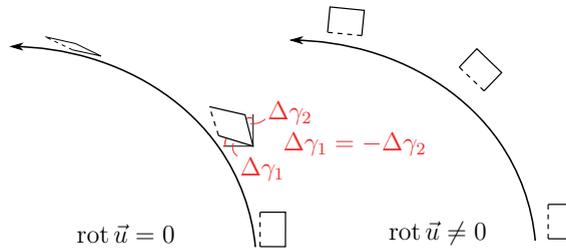


Abbildung 3.14: Vergleich von Potentialwirbel und Festkörperrotation.

3.4 Geschwindigkeitspotential

Für beliebige skalare Funktionen ϕ gilt die Identität $\text{rot}(\text{grad } \phi) = 0$. In drehungsfreien Strömungen gilt $\text{rot } \vec{u} = 0$. Daher kann die Geschwindigkeit in drehungsfreien Strömungen über ein skalares **Geschwindigkeitspotential** ϕ dargestellt werden:

$$\vec{u} = \text{grad } \phi. \quad (3.52)$$

Die Kontinuitätsgleichung muss erfüllt werden. Für **inkompressible Strömungen** folgt somit

$$0 = \text{div } \vec{u} = \text{div grad } \phi \Rightarrow \boxed{\Delta\phi = 0.} \quad (3.53)$$

ϕ ist also für inkompressible Strömungen eine Lösung der Laplace-Gleichung. Lösungen zu bestimmten Fällen ergeben sich über Randbedingungen.

Beispiele

i) Potentialwirbel:

Der Potentialwirbel hat nur eine azimutale Geschwindigkeitskomponente v , die radial mit $1/r$ abfällt (s.o.). Die radiale Komponente u verschwindet. Damit erhält man in Zylinderkoordinaten (r : Radius, φ : Azimutalwinkel):

$$u = \partial_r \phi = 0 \quad \Rightarrow \phi \text{ ist unabhängig von } r, \quad (3.54)$$

$$v = \frac{1}{r} \partial_\varphi \phi = \frac{c}{r} \quad \Rightarrow \boxed{\phi = c \cdot \varphi.} \quad (3.55)$$

Die Zirkulation ist hier

$$\Gamma = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{s} = \oint_C \text{grad } \phi \, d\vec{s} = \lim_{E \rightarrow A} (\phi_E - \phi_A), \quad (3.56)$$

wobei ϕ_A und ϕ_E den Wert von ϕ an den benachbarten Anfangs- und Endpunkten der geschlossenen Kurve C bezeichnen. Je nachdem, ob die Kurve C den Ursprung umschließt oder nicht (vgl. Abbildung 3.15), erhält man für die Zirkulation

$$\Gamma_{C_1} = 2\pi c, \quad \Gamma_{C_2} = 0. \quad (3.57)$$

Beim Potentialwirbel ist die Zirkulation Γ immer identisch Null, wenn C eine geschlossene Kurve ist, die den Ursprung nicht einschließt.

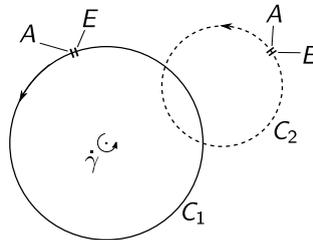


Abbildung 3.15: Verschiedene Integrationswege zur Bestimmung der Zirkulation beim Potentialwirbel.

ii) Quelle/Senke:

Eine klassische Lösung der Laplace-Gleichung lautet:

$$\phi = -\frac{a}{r}, \quad a = \text{const}, \quad r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = |\vec{r}|. \quad (3.58)$$

Interpretiert man diese Lösung als Geschwindigkeitspotential, so erhält man

$$\vec{u} = \text{grad } \phi = -a \text{ grad } \frac{1}{r} = \frac{a}{r^3} \vec{r}, \quad |\vec{u}| = \frac{a}{r^2}. \quad (3.59)$$

Wie beim Potentialwirbel liegt am Ursprung eine Singularität vor. Man überzeugt sich schnell, dass die Lösung $\text{div } \vec{u} = 0$ für alle $r \neq 0$, also die Kontinuitätsgleichung erfüllt. Den Volumenfluss Q durch eine symmetrisch um den Ursprung liegende Kugeloberfläche A mit Radius R erhält man durch Integration der Geschwindigkeit über diese Fläche:

$$Q = \int_A \vec{u} \cdot \vec{n} \, dA = \frac{a}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi a = \text{const.} \quad (3.60)$$

Der Volumenfluss ist unabhängig vom Radius. Je nach Vorzeichen der Konstanten a liegt eine Quell- bzw. Senkenströmung vor, vgl. Abbildungen 3.16a und 3.16b, die passend zur Singularität am Ursprung als **Punktquelle** bzw. **Punkt Senke** bezeichnet wird. Näherungsweise liegt die einer Punkt Senke entsprechende Strömung z.B. beim Ausfluss aus einem Loch am Boden eines Eimers vor (Abbildung 3.16c).

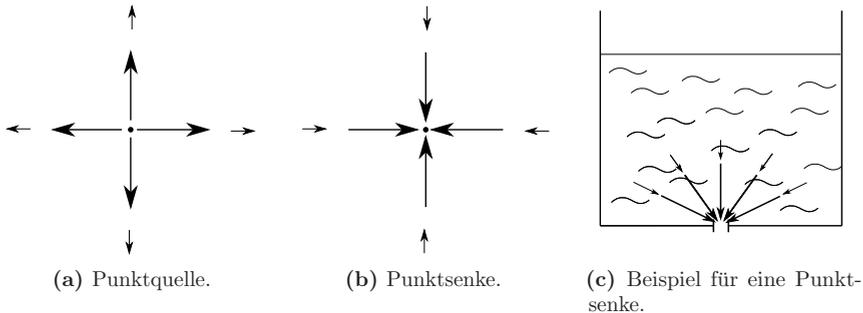


Abbildung 3.16: Punktquelle und -senke.

3.5 Gradiententensor der Geschwindigkeit

Wir haben bereits gesehen, dass Ableitungen der einzelnen Geschwindigkeitskomponenten nach den verschiedenen Raumrichtungen eine Rolle spielen. Dies soll hier genauer untersucht werden. Dazu betrachten wir den Gradiententensor der Geschwindigkeiten (*velocity gradient tensor*). Dieser ist definiert als

$$L_{k\ell} := \text{grad } \vec{u} = (u_{k/\ell}) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} u_1 & \partial_{x_2} u_1 & \partial_{x_3} u_1 \\ \partial_{x_1} u_2 & \partial_{x_2} u_2 & \partial_{x_3} u_2 \\ \partial_{x_1} u_3 & \partial_{x_2} u_3 & \partial_{x_3} u_3 \end{pmatrix}. \quad (3.61)$$

Dieser Tensor lässt sich in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil aufspalten:

$$L_{k\ell} = (u_{k/\ell}) = \underbrace{\frac{1}{2}(u_{k/\ell} + u_{\ell/k})}_{=:D_{k\ell}} + \underbrace{\frac{1}{2}(u_{k/\ell} - u_{\ell/k})}_{=:R_{k\ell}}, \quad (3.62)$$

$D_{k\ell}$ ist der **Deformationstensor** und ist symmetrisch: $D_{k\ell} = D_{\ell k}$,
 $R_{k\ell}$ ist der **Rotationstensor** und ist antisymmetrisch: $R_{k\ell} = -R_{\ell k}$.

Rotationstensor (rotation rate tensor):

Betrachten wir zuerst den **Rotationstensor** genauer. Wir hatten in Gleichung (3.40) gefunden, dass

$$\vec{\gamma} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{u} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_{3/2} - u_{2/3} \\ u_{1/3} - u_{3/1} \\ u_{2/1} - u_{1/2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \vec{\omega} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}. \quad (3.63)$$

Setzt man dies in die Definition von $R_{k\ell}$ ein, vgl. Gleichung 3.62, so folgt direkt

$$R_{k\ell} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.64)$$

Der Rotationstensor $R_{k\ell}$ ist **anisotrop**, also richtungsabhängig. Weitere Eigenschaften sind **Spurfreiheit** $\operatorname{Tr}(R_{k\ell}) = 0$ und **Antisymmetrie** (per Definition).

Als Beispiel wird eine Festkörperrotation um die x_3 -Achse betrachtet, vgl. Abbildung 3.17. Das bedeutet, dass $\omega_1 = \omega_2 = 0$, sowie $\omega_3 = \operatorname{const} \neq 0$. Hier wird $\omega_3 > 0$ gewählt. Für die Geschwindigkeit am Ort \vec{x} gilt:

$$\vec{u} = \vec{\gamma} \times \vec{x} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{u} \times \vec{x} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \times \vec{x} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -x_2\omega_3 \\ x_1\omega_3 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.65)$$

Dies erhält man auch mittels Rotationstensor wie folgt:

$$R_{k\ell} \vec{x} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -x_2\omega_3 \\ x_1\omega_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{u}. \quad (3.66)$$

Allgemein gilt für die Festkörperrotation:

$$\vec{u} = R_{k\ell} \vec{x}. \quad (3.67)$$

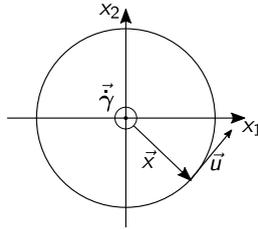


Abbildung 3.17: Festkörperrotation.

Deformationstensor (strain rate tensor):

Deformation setzt sich aus Dehnung und Scherung zusammen. Beides wird durch den **Deformationstensor** D_{kl} beschrieben. Wir beginnen mit der Dehnung.

Dehnung In Abbildung 3.18 ist die Dehnung eines rechteckigen Körpers dargestellt. Da sich die verschiedenen Ecken mit leicht unterschiedlicher Geschwindigkeit bewegen, verändern sich die Kantenlängen in einem kleinen Zeitintervall dt wie folgt (Vorgehensweise wieder über Reihenentwicklung der Geschwindigkeit nach Taylor):

$$\delta x_1 = u_{1/1} \Delta x_1 dt, \quad \delta x_2 = u_{2/2} \Delta x_2 dt. \quad (3.68)$$

Die relative Dehnung in x_1 -Richtung ist dann

$$\varepsilon_1 = \frac{\delta x_1}{\Delta x_1} = u_{1/1} dt, \quad \varepsilon_2, \varepsilon_3 \text{ entsprechend.} \quad (3.69)$$

Die relative Dehnung pro Zeit ist demnach

$$\dot{\varepsilon}_1 = u_{1/1}, \quad \dot{\varepsilon}_2, \dot{\varepsilon}_3 \text{ entsprechend.} \quad (3.70)$$

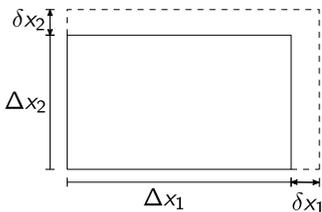


Abbildung 3.18: Dehnung.

Mit diesen Größen ergibt sich die **relative Volumenänderung aufgrund von Dehnung**, Ψ , zu:

$$\Psi = \frac{\delta V}{\Delta V} = \frac{(\Delta x_1 + \delta x_1)(\Delta x_2 + \delta x_2)(\Delta x_3 + \delta x_3) - \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3} \quad (3.71)$$

$$= \frac{\delta x_1}{\Delta x_1} + \frac{\delta x_2}{\Delta x_2} + \frac{\delta x_3}{\Delta x_3} + \mathcal{O}(\delta x_i^2) = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i. \quad (3.72)$$

Entsprechend ist die **relative Volumenänderung pro Zeit** gegeben durch:

$$\dot{\Psi} = \sum_{i=1}^3 \dot{\epsilon}_i = u_{i/i} = \operatorname{div} \vec{u}. \quad (3.73)$$

Dies lässt sich auch über das Reynolds'sche Transporttheorem zeigen. Zur Erinnerung, das Reynold'sche Transporttheorem lautet :

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \chi \, dV = \int_{V(t)} \frac{\partial \chi}{\partial t} \, dV + \int_{A(t)} \chi \vec{b} \cdot \vec{n} \, dA \quad (3.74)$$

Wir betrachten an dieser Stelle ein materiell gebundenes Volumen $V(t)$, dann ist $\vec{b} = \vec{u}$. Sei außerdem die spezifische Zustandsgröße $\chi = 1$. Dann folgt:

$$\frac{dV}{dt} = 0 + \int_{A(t)} \vec{u} \cdot \vec{n} \, dA = \int_{V(t)} \operatorname{div} \vec{u} \, dV, \quad (3.75)$$

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \operatorname{div} \vec{u}. \quad (3.76)$$

Dies geht bereits auf Euler (1755) zurück. Wir halten fest:

lokale Divergenz der Geschwindigkeit \longleftrightarrow relative Volumenänderung pro Zeit.

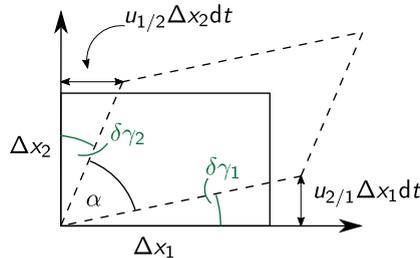


Abbildung 3.19: Scherung.

Scherung Wir betrachten in Abbildung 3.19 die Scherung eines Quaders in zweidimensionaler Darstellung. Die Situation entspricht der aus Abbildung 3.8, nur dass hier die Scherung und nicht die Drehung betrachtet wird. Die in einem kleinen Zeitintervall dt entstehenden Winkeländerungen sind die gleichen, wie bei der Drehung. Die Scherung ist jedoch durch die Summe dieser Winkeländerungen

gegeben. Die zeitliche Änderung der gesamten Winkeländerung erhält man wie folgt:

$$\delta\gamma_1 \approx u_{2/1} dt, \quad \delta\gamma_2 \approx u_{1/2} dt \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta\gamma_1}{\delta t} + \frac{\delta\gamma_2}{\delta t} = u_{2/1} + u_{1/2}. \quad (3.77)$$

Entsprechende Ausdrücke erhält man mit Blick auf die anderen Seiten des Quaders. Ein Vergleich mit dem Deformationstensor zeigt, dass die Winkeländerungen aufgrund von Scherung Komponenten des Deformationstensors entsprechen. Allerdings enthält der Deformationstensor noch Anteile, die mit einer Volumenänderung zusammenhängen. Diese kann man abspalten, indem man den Deformationstensor in zwei Anteile zerlegt. Einer ist isotrop und beschreibt allein die Volumenänderungsrate, der andere ist symmetrisch und beschreibt die Scherung (Winkeländerungsraten) ohne Volumenänderung:

$$\begin{array}{l}
 D_{k\ell} = \frac{1}{2} (u_{k/\ell} + u_{\ell/k}) \\
 = \underbrace{\left[\frac{1}{3} \delta_{k\ell} u_{m/m} \right]}_{\substack{\text{isotrope Volumenänderung} \\ \text{pro Zeit}}} + \underbrace{\left[\frac{1}{2} (u_{k/\ell} + u_{\ell/k}) - \frac{1}{3} \delta_{k\ell} u_{m/m} \right]}_{\substack{\text{symm., Spur}=0, \\ \text{Scherung ohne Volumenänderung}}}. \quad (3.78)
 \end{array}$$

Zur Veranschaulichung seien hier zwei Komponenten explizit ausgeschrieben:

$$D_{12} = [0] + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) - 0 \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \quad (3.79)$$

$$D_{22} = \frac{1}{3} \operatorname{div} \vec{u} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}. \quad (3.80)$$

Kapitel 4

Dynamik

4.1 Spannungszustand im reibungsbehafteten Fluid

In der Strömungsmechanik wird die Dynamik wesentlich durch die Wirkung von Spannungen im Fluid bestimmt. In der Statik und im Fall reibungsfreier Fluide ist der Spannungszustand bereits durch eine richtungsunabhängige Normalspannung, den Druck, vollständig definiert. Ist das Fluid jedoch reibungsbehaftet, können zusätzlich Tangentialspannungen auftreten. Für ebene Scherströmungen Newton'scher Fluide haben wir den einfachen Newton'schen Ansatz für die Schubspannung kennengelernt. Diesen gilt es für komplexere Strömungsvorgänge zu erweitern. Dazu betrachten wir zunächst die allgemeine Beschreibung des Spannungszustandes in einem Kontinuum über den Spannungstensor und darauf folgend die Erweiterung des Newton'schen Ansatzes für den allgemeinen Fall.

4.1.1 Spannungstensor

Wir betrachten ein Flächenelement dA_n , dessen Orientierung im Raum durch seine Flächennormale \vec{n} gegeben ist. An der Fläche greife eine Flächenkraft $d\vec{F}_\sigma$ an. Im Gleichgewicht wirkt auf der Rückseite der Fläche die entgegengesetzte Kraft $-d\vec{F}_\sigma$, siehe Abbildung 4.1. Wir definieren den **Cauchy'schen Spannungsvektor** $\vec{\Sigma}$ wie folgt:

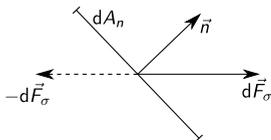


Abbildung 4.1: Kräfte an einer Fläche dA_n mit Flächennormaler \vec{n} .

$$\vec{\Sigma}_n = \begin{pmatrix} \sigma_{n1} \\ \sigma_{n2} \\ \sigma_{n3} \end{pmatrix} = \frac{d\vec{F}_\sigma}{dA_n}, \quad (4.1)$$

wobei der erste Index, n , der Komponenten σ_{ni} , $i = 1, 2, 3$, für die Flächenorientierung und der darauf folgende für die Spannungsrichtung steht (es sei angemerkt, dass in der Literatur auch die umgedrehte Reihenfolge gebräuchlich ist). Der Cauchy'sche Spannungsvektor ist abhängig sowohl vom Ort \vec{x} als auch

von der Orientierung \vec{n} des Flächenelements. Dies wird im Folgenden am Beispiel eines Stabs gezeigt.

Beispiel In Abbildung 4.2 ist ein Stab im Gleichgewicht dargestellt, an dem in axialer Richtung Kräfte $\pm \vec{F}$ angreifen. Wir bestimmen die Spannungen, die auf verschieden orientierte gedachte Schnittflächen im Stab wirken. Auf die Fläche A_0 , die unter dem Winkel $\alpha = 0^\circ$ zur Stabachse liegt, wirkt nur eine Normalspannung $\sigma_{0,n}$. Auf Flächen A_α unter einem Winkel $\alpha \neq 0^\circ$ zur Stabachse wirken dagegen sowohl tangentiale ($F_{\alpha,t}$) als auch normale ($F_{\alpha,n}$) Kräfte. Bezeichnet man die daraus resultierenden normalen und tangentialen Spannungskomponenten mit $\sigma_{\alpha,n}$ bzw. $\sigma_{\alpha,t}$, so erhält man:

$$\sigma_{0,n} = \frac{F}{A_0}, \quad \sigma_{\alpha,n} = \frac{F \cos \alpha}{A_0 \cos^{-1} \alpha} = \sigma_{0,n} \cdot \cos^2 \alpha, \quad (4.2)$$

$$\sigma_{0,t} = 0, \quad \sigma_{\alpha,t} = \frac{F \sin \alpha}{A_0 \cos^{-1} \alpha} = \sigma_{0,n} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha. \quad (4.3)$$

Die Spannungen sind abhängig vom Winkel α , also der Flächenorientierung.

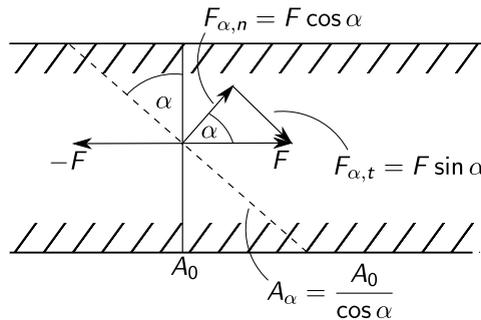


Abbildung 4.2: Kräfte an gedachten Schnittflächen in einem Stab unter Spannung.

Vorzeichen Wir betrachten ein Flächenelement dA_1 mit Normalenvektor \vec{e}_1 in x_1 -Richtung. Auf diese Fläche wirke die Kraft $d\vec{F}_\sigma$ (vgl. Abbildung 4.3). Der zugehörige Spannungsvektor $\vec{\Sigma}_1$ ist dann gegeben durch:

$$\vec{\Sigma}_1 = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix} = \frac{d\vec{F}_\sigma}{dA_1}. \quad (4.4)$$

Auf die Rückseite des Flächenelements wirkt die betragsmäßig gleiche Kraft $-d\vec{F}_\sigma$. Die Rückseite des Flächenelements mit Flächennormaler $-\vec{e}_1$ wird mit „-1“ indiziert,

dA_{-1} , wobei gilt $dA_1 = dA_{-1}$. Für den Spannungsvektor erhalten wir:

$$\vec{\Sigma}_{-1} = \frac{-d\vec{F}_\sigma}{dA_{-1}} = \frac{-d\vec{F}_\sigma}{dA_1} = -\vec{\Sigma}_1. \quad (4.5)$$

Die Spannungsvektoren auf Vorder- und Rückseite eines Flächenelements sind entgegengesetzt gleich. Dies ist bei der folgenden Betrachtung des Kräftegleichgewichts zu berücksichtigen.

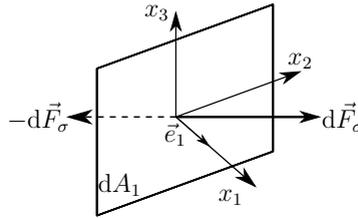


Abbildung 4.3: Kräftegleichgewicht am Flächenelement.

Kräftegleichgewicht Wir betrachten nun das Kräftegleichgewicht an einem kleinen Volumenelement dV mit der Oberfläche dA . Wie schon in der Statik beschränken wir uns hier der Einfachheit halber wieder auf die Betrachtung eines Prismas in Seitenansicht, siehe Abbildung 4.4. An dem Prisma greifen sowohl Volumen- als auch Oberflächenkräfte an. Da die Volumenkräfte für $dV \rightarrow 0$ schneller verschwinden als die Oberflächenkräfte, muss im Grenzfall $dV \rightarrow 0$ bereits die vektorielle Summe der Oberflächenkräfte verschwinden. Mit $dA_{-i} = dA_i$:

$$\sum_{i=1}^2 \left(-\vec{\Sigma}_i dA_i \right) + \vec{\Sigma}_n dA_n \stackrel{!}{=} 0. \quad (4.6)$$

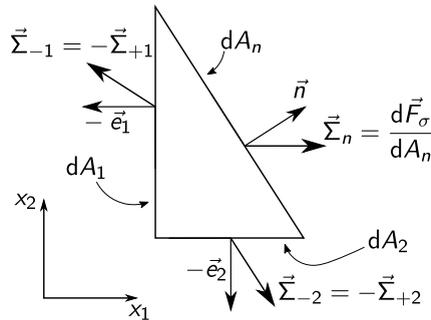


Abbildung 4.4: Spannungen an einem Prisma im Gleichgewicht.

Da $dA_i = \vec{n} \cdot \vec{e}_i dA_n = n_i dA_n$ folgt:

$$\left[\sum_{i=1}^2 \left(-\vec{\Sigma}_i n_i \right) + \vec{\Sigma}_n \right] dA_n \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.7)$$

$$\xrightarrow{dA_n \neq 0} \boxed{\vec{\Sigma}_n = \sum_{i=1}^2 \left(n_i \vec{\Sigma}_i \right)}. \quad (4.8)$$

$\vec{\Sigma}_n$ ist der Spannungsvektor bezüglich der Fläche mit \vec{n} als Normalenvektor. Alternativ lässt sich dies auch über die **Cauchy'sche Formel** darstellen:

$$\boxed{\sigma_{nj} = (\sigma_{ij})^T \cdot n_i}. \quad (4.9)$$

In einem Kontinuum ist der Spannungszustand vollständig bestimmt durch den

$$\boxed{\text{Spannungstensor (stress tensor)}} \\ \boxed{\sigma_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}}. \quad (4.10)$$

Die Diagonalelemente σ_{ii} sind die Normalspannungen. Diese sind formal als Zugspannungen definiert (ein positiver Druck entspricht einem $\sigma_{ii} < 0$). Die σ_{ij} , $i \neq j$ bezeichnen die Tangentialspannungen (Schubspannungen), die in Fluiden allein durch Zähigkeit verursacht werden.

Im Ruhezustand gilt $\sigma_{ii} = -p$ und $\sigma_{ij} = 0$, $\forall i \neq j$. Dies legt nahe, den Druck von σ_{ij} abzuspalten und die zähigkeitsbedingten Spannungen in einem Tensor τ_{ij} der Reibungsspannungen zusammenzufassen:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = -\mathbb{1}p + \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Der Einheitstensor $\mathbb{1}$ ist gegeben durch $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und 0 sonst.

Symmetrie des Spannungstensors Wir betrachten den Drehimpuls \vec{L} eines kleinen Quaders. Die zeitliche Änderung seines Drehimpulses \vec{L} gleicht dem Drehmoment \vec{M} der angreifenden äußeren Kräfte

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (4.12)$$

Als äußere Kräfte werden allein reibungsbedingte Tangentialkräfte berücksichtigt. Exemplarisch behandeln wir die Drehung des Quaders um die x_3 -Achse. Die

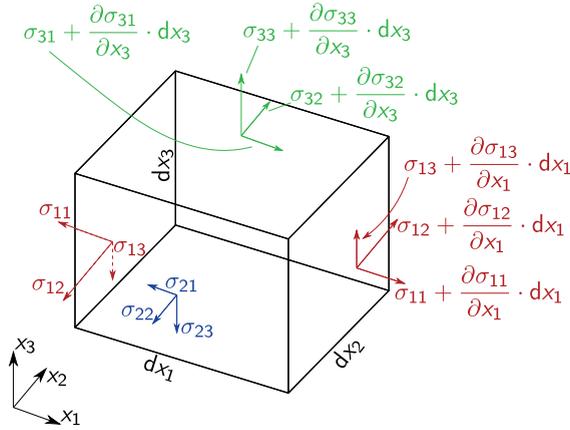


Abbildung 4.5: Spannungen an einem Quader.

Winkelgeschwindigkeit sei durch ω_3 und das zugehörige Trägheitsmoment durch dI_3 gegeben. Mit

$$dI_3 \approx \rho \cdot (dx_1^2 + dx_2^2) dx_1 dx_2 dx_3 \propto \rho \cdot dx_i^5 \quad (4.13)$$

erhalten wir (vgl. Abbildung 4.5):

$$\frac{dL_3}{dt} = \underbrace{dI_3 \cdot \dot{\omega}_3}_{\propto dx_i^5} \approx \underbrace{2}_{2 \text{ Seiten}} \underbrace{\sigma_{12} dx_2 dx_3}_{\text{Fläche}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} dx_1}_{\text{Hebelarm}} - 2\sigma_{21} dx_1 dx_3 \frac{1}{2} dx_2. \quad (4.14)$$

Das Minuszeichen im rechten Ausdruck kommt daher, dass die Spannung σ_{21} in Richtung eines mathematisch negativen Drehsinns wirkt (siehe Abbildung 4.5). Kleine Spannungsunterschiede auf sich gegenüber liegenden Seiten (z.B. $\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} dx_1$) tragen nur in höherer Ordnung bei und wurden deshalb vernachlässigt. Geht nun das Volumen gegen null ($dx_i \rightarrow 0$), so verschwindet die linke Seite der Gleichung schneller als die rechte. Daher muss für $dx_i \rightarrow 0$ bereits die rechte Seite verschwinden. Es folgt:

$$2\sigma_{12} dx_2 dx_3 \cdot \frac{1}{2} dx_1 = 2\sigma_{21} dx_1 dx_3 \frac{1}{2} dx_2 \quad (4.15)$$

$$\Rightarrow \sigma_{12} = \sigma_{21}. \quad (4.16)$$

Dies gilt ganz allgemein, der Spannungstensor ist symmetrisch:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}. \quad (4.17)$$

Zusammenfassend ist der Spannungstensor gegeben durch:

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij}p + \tau_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad (4.18)$$

wobei aufgrund der Symmetrie zusätzlich zum Druck p nur sechs weitere Komponenten $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ auftreten, die in Fluiden durch Zähigkeit verursacht werden.

4.1.2 Zusammenhang zwischen dem Spannungstensor und dem Gradiententensor der Geschwindigkeit

In diesem Abschnitt wird ein für viele (aber nicht alle!) Fluide geltender Zusammenhang zwischen den Reibungsspannungen und dem Geschwindigkeitsfeld heuristisch abgeleitet. Für die einfache ebene Scherströmung in x -Richtung ($u = u(y)$) liefert der uns bereits aus Kapitel 1 bekannte Newton'sche Ansatz für den Impulstransport in y -Richtung, der einer Tangentialspannung in x -Richtung bzgl. einer Fläche mit Normaler in y -Richtung entspricht:

$$\tau_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4.19)$$

Auch in allgemeinen, komplexeren Strömungsfeldern ist zu erwarten, dass der Impulstransport zwischen Fluidteilchen, die sich gegeneinander bewegen (und damit zu einer Deformation des Fluids führen), Reibungsspannungen verursacht. Aus physikalischen Überlegungen sind dabei folgende Punkte zu berücksichtigen:

- Reibungsspannungen treten nur auf, falls das Fluid nicht gleichförmig strömt. Daraus folgt, dass in Ruhe keine Restreibungsspannungen auftreten.
- Bei Festkörperrotation bewegen sich Fluidteilchen nicht gegeneinander, daher entstehen auch keine Reibungsspannungen.
- Reibung hängt mit Transportprozessen auf molekularen Längenskalen L_{mol} zusammen. $\partial u_k / \partial x_l$ ändert sich kaum über Längen der Größenordnung $\Delta x_l \approx L_{\text{mol}}$. Es wird daher erwartet, dass höhere Ableitungen der Geschwindigkeit nicht wesentlich sind.
- Es werden hier nur isotrope Fluide betrachtet, die keine richtungsabhängige innere Struktur aufweisen.
- Der Spannungstensor ist symmetrisch.

Auf Grundlage dieser Überlegungen gehen wir davon aus, dass die Ableitungen aller Geschwindigkeitskomponenten nach sämtlichen Raumrichtungen einen Beitrag zu den Reibungsspannungen liefern. Als allgemeinsten Ansatz wählen wir einen linear homogenen Zusammenhang zwischen den τ_{ij} und den $u_{k/l}$:

$$\tau_{ij} = A_{ijkl} \cdot u_{k/l} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 A_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (4.20)$$

Es treten $3^4 = 81$ unbekannte Koeffizienten A_{ijkl} auf. Bereits aufgrund der Symmetrie des Spannungstensors reduziert sich deren Anzahl. Wenn alle Geschwindigkeitsableitungen verschwinden, d.h. bei gleichförmiger Bewegung, treten keine Tangentialspannungen auf (homogener Zusammenhang). Wir gehen nun wie folgt

Fluide, die diesen Zusammenhang zwischen dem Spannungs- und Deformationstensor erfüllen, werden als **Newton'sche Fluide** bezeichnet.

Als nächstes bestimmen wir den Mittelwert der Normalspannungen, $\langle \sigma_n \rangle$:

$$\langle \sigma_n \rangle = \frac{1}{3} \sigma_{ii} = -p + \underbrace{\frac{1}{3}(2\mu + 3\lambda)}_{=\mu_B} u_{m/m} = -p + \mu_B \cdot u_{m/m}. \quad (4.26)$$

Falls $\mu_B \neq 0$, folgt sofort, dass eine reine Volumenänderung ($u_{m/m} \neq 0$) Normalspannungen erzeugt. Empirisch zeigt sich, dass für einatomige Gase $\mu_B = 0$ und für mehratomige Gase $\mu_B \approx 0$ ist. Bei schnellen Zustandsänderungen ist jedoch $\mu_B > \mu$, beispielsweise verursacht μ_B bei Ultraschallwellen in Luft eine erhebliche Dämpfung. Oft wird $\mu_B = 0$ gesetzt. Dies ist auch als **Stokes'sche Hypothese** bekannt und führt zu

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu. \quad (4.27)$$

Der Spannungstensor ist dann gegeben durch

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij} \left(p + \frac{2}{3}\mu u_{m/m} \right) + \mu (u_{i/j} + u_{j/i}). \quad (4.28)$$

Für inkompressible Fluide ist $\text{div } \vec{u} = u_{m/m} = 0$. Damit vereinfacht sich der Spannungstensor zu

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij} p + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (4.29)$$

4.1.3 Navier-Stokes-Gleichung

In diesem Abschnitt stellen wir die Bewegungsgleichungen der Strömungsmechanik auf. Dazu betrachten wir die Kräfte, die auf ein kleines Volumenelement wirken. Dies sind zum einen Oberflächenkräfte, verursacht durch Spannungen, und zum anderen Volumenkräfte.

Oberflächenkräfte Die an der Oberfläche des Volumenelements angreifenden Normal- und Tangentialspannungen (siehe hierzu erneut Abbildung 4.5) führen zu einer Kraftwirkung auf das Volumenelement, falls die sich entsprechenden Spannungen auf gegenüberliegenden Oberflächen betragsmäßig verschieden sind. Für eine Kraft in x_1 -Richtung liefert z.B. die Normalspannung auf den Flächen mit Flächennormaler in x_1 -Richtung und Fläche $dx_2 dx_3$ den Beitrag:

$$\left[\left(\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) - \sigma_{11} \right] dx_2 dx_3 = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3. \quad (4.30)$$

Analog gilt dies für die Tangentialspannungen. Allgemein erhält man für die Komponente der gesamten Oberflächenkraft in x_i -Richtung:

$$\left(\frac{\partial \sigma_{1i}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{2i}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{3i}}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3 = \sigma_{ki/k} dx_1 dx_2 dx_3. \quad (4.31)$$

Volumenkräfte Die äußeren Volumenkräfte werden hier wieder als spezifische Kraft, genauer als Kraft pro Masse, angegeben:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = F_i. \quad (4.32)$$

Die Masse dm und die Beschleunigung \vec{a} des Volumenelements sind gegeben durch

$$dm = \rho dx_1 dx_2 dx_3, \quad (4.33)$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = u_{i/t} + u_k u_{i/k}. \quad (4.34)$$

Nach Newton's zweitem Axiom, der Grundgleichung der Mechanik, entsprechen die äußeren am Volumenelement angreifenden Kräfte, zu denen hier auch die Oberflächenkräfte gehören, gerade Masse mal Beschleunigung des Volumenelements:

$$\underbrace{a_i dm}_{\text{Trägheitskraft}} = \underbrace{\sigma_{ki/k} dx_1 dx_2 dx_3}_{\text{spannungsbedingte Kräfte}} + \underbrace{F_i dm}_{\text{Volumenkräfte}}. \quad (4.35)$$

Drückt man hier noch die Beschleunigung über die substantielle Zeitableitung der Geschwindigkeit aus, so erhält man die

Cauchy'sche Bewegungsgleichung

$$u_{i/t} + u_k u_{i/k} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ki/k} + F_i = -\frac{1}{\rho} p_{/i} + \frac{1}{\rho} \tau_{ki/k} + F_i. \quad (4.36)$$

Diese Gleichung enthält noch keinen Ansatz für den Tensor der Reibungsspannungen und gilt daher ganz allgemein in der Kontinuumsmechanik. Eine alternative Schreibweise lautet

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\nabla p + \nabla \tau + \rho \vec{F}. \quad (4.37)$$

Im Folgenden betrachten wir Newton'sche Fluide. Für diese haben wir im letzten Abschnitt die Reibungsspannungen τ_{ki} spezifiziert:

$$\tau_{ki} = \mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) + \lambda \delta_{ki} \text{div } \vec{u}. \quad (4.38)$$

Setzt man diesen Ansatz in die Cauchy'sche Bewegungsgleichung ein, so ergibt sich:

$$\rho(u_{i/t} + u_k u_{i/k}) = -p_{/i} + [\mu(u_{k/i} + u_{i/k})]_{/k} + [\lambda \delta_{ki} u_{m/m}]_{/k} + \rho F_i. \quad (4.39)$$

Voll ausgeschrieben erhält man z.B. für die Komponente in x_1 -Richtung, also für $i = 1$ in Gleichung (4.39):

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) = \\ - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \rho F_1 + 2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Es ist hier zu beachten, dass μ und λ im Allgemeinen nicht konstant sind, insbesondere ist μ von der Temperatur abhängig ($\mu = \mu(T)$). Oft, insbesondere in inkompressiblen Strömungen, gilt jedoch $\mu \approx \text{const}$ und, mit der Stokes'schen Hypothese, auch $\lambda = -2/3\mu \approx \text{const}$. Für $\mu = \text{const}$ und $\lambda = \text{const}$ sowie der Annahme von Inkompressibilität ($\text{div } \vec{u} = 0$) vereinfachen sich die Reibungsterme erheblich. Dann lautet z.B. die x_1 -Komponente des Reibungsterms:

$$\begin{aligned} 2\mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \lambda \frac{\partial}{\partial x_1} (\text{div } \vec{u}) \\ = \underbrace{\mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right)}_{=: \Delta} u_1 + (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_1} \underbrace{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)}_{\text{div } u=0 \text{ hier}} \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$= \mu \Delta u_1.$$

Damit erhält man als Bewegungsgleichung für inkompressible Newton'sche Fluide die

Navier-Stokes-Gleichung

$$\underbrace{\rho \frac{du_i}{dt}}_{\text{Trägheit}} = - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x_i}}_{\text{Druck}} + \underbrace{\mu \Delta u_i}_{\text{Reibung}} + \underbrace{\rho F_i}_{\text{äußere Kräfte}}, \quad \mu = \text{const}, \text{div } \vec{u} = 0. \quad (4.42)$$

Eine alternative Schreibweise der Navier-Stokes-Gleichung lautet:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{u} + \vec{F} \quad \text{mit } \Delta \vec{u} := \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \end{pmatrix}, \quad (4.43)$$

wobei ν die kinematische Viskosität bezeichnet und die Anwendung des Laplace Operators auf den Geschwindigkeitsvektor komponentenweise zu verstehen ist.

Die Navier-Stokes-Gleichung ist eine nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die Nichtlinearität steckt in der konvektiven Zeitableitung der Geschwindigkeit. Die Ableitungen zweiter Ordnung in den Reibungstermen erlauben die Erfüllung der Haftbedingung an überströmten festen Wänden/Oberflächen, also die Vorgabe zweier Bedingungen für die Geschwindigkeit:

- Normalkomponente der Geschwindigkeit (relativ zur Wand) verschwindet,
- Tangentialgeschwindigkeit an der Wand verschwindet.

Zur Berechnung instationärer, also zeitabhängiger, Strömungen sind zusätzlich Anfangsbedingungen anzugeben.

Die Reibungsterme in der Navier-Stokes-Gleichung sind oft klein im Vergleich zu den anderen Termen. Deshalb könnte man geneigt sein, diese zu vernachlässigen und fortzulassen. Dann reduziert sich jedoch die Ordnung der Differentialgleichung um eins und es können nicht mehr zwei Randbedingungen vorgegeben werden. An festen Oberflächen ist die Haftbedingung daher nur mit den Reibungstermen erfüllbar. Ohne Reibungsterme sind Effekte, die auf der Haftbedingung beruhen, nicht beschreibbar.

Abschließend sei noch einmal darauf hingewiesen, dass die Navier-Stokes-Gleichung nur für inkompressible Newton'sche Fluide gilt. Die in Abschnitt 1.1 angesprochenen nicht-Newton'schen Fluide werden durch diese Gleichung nicht beschrieben, da der Spannungstensor dann nicht mehr auf einfache Weise über zwei Koeffizienten linear mit dem Gradiententensor der Geschwindigkeit verbunden ist. Ein vielen bekanntes Beispiel für ein nicht-Newton'sches Verhalten einer Flüssigkeit ist z.B. Kuchenteig, der in einer Rührmaschine in der Mitte am Stab des Rührers hochkriecht, anders als man dies aufgrund der Zentrifugalkraft erwarten würde.

4.2 Reibungsfreie Fluide

In vielen Fällen lassen sich beobachtete Strömungsvorgänge bereits ohne Berücksichtigung von Reibung beschreiben. Dies ist vor allem in der Gasdynamik und bei Flüssigkeiten mit freien Oberflächen der Fall. Die Fluide und die Strömungen können dann näherungsweise als reibungsfrei angesehen werden.

4.2.1 Euler-Gleichung

In Kapitel 2, Statik, wurde gezeigt, dass in ruhenden Fluiden der Spannungszustand allein durch die richtungsunabhängige Normalspannung, den Druck, bestimmt ist.

Dies gilt auch in reibungsfrei strömenden Fluiden, da dort die reibungsbedingten Schubspannungen verschwinden. Die Bewegungsgleichung für reibungsfreie Fluide folgt daher direkt aus der Cauchy'schen Bewegungsgleichung (4.36), indem man in dieser die Reibungsspannungen τ_{ik} fortlässt. Als Bewegungsgleichung für das reibungsfreie Fluid erhält man so die

Euler-Gleichung

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{F}. \quad (4.44)$$

Es sei betont, dass hier keine Bedingung an die Kompressibilität des Fluids gestellt wurde. Die Euler-Gleichung gilt daher allgemein für kompressible Fluide, $\text{div } \vec{u} \neq 0$ ist erlaubt. Bei der Euler-Gleichung handelt es sich um eine nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung. Anders als bei der Navier-Stokes-Gleichung kann daher nur eine Randbedingung vorgegeben werden. Bei instationären Strömungen kommen noch Anfangsbedingungen dazu. Wir unterscheiden zwischen festen Berandungen und Flüssigkeitsoberflächen:

- **feste Wand:** die Oberfläche kann nicht durchströmt werden, die Geschwindigkeitskomponente in wandnormaler Richtung (\vec{n}) muss verschwinden, $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, das Fluid strömt tangential entlang der Wand.
Beachte: Die Haftbedingung ist nicht mehr erfüllbar! Wichtige strömungsmechanische Phänomene wie das Zustandekommen von Widerstand sind nicht beschreibbar.
- **freie Flüssigkeitsoberfläche:** die Oberfläche ist frei beweglich, daher wird statt einer Bedingung für die Geschwindigkeit gewöhnlich der Druck im Gas über der Flüssigkeit als konstant vorgegeben.

Beispiel: Euler-Gleichung mit Coriolis-Kraft

Als ein Anwendungsbeispiel für die Euler-Gleichung werden lokal Strömungen in der Atmosphäre an einem Ort unter dem Winkel φ nördlicher Breite betrachtet. Dabei soll, um das Beispiel einfach zu halten, nur die Coriolis-Kraft berücksichtigt werden. (Der geringe Einfluss der Zentrifugalkraft kann, ähnlich wie die Schwerkraft in der Hydrostatik, über ihr Kraftpotential in den Druck integriert werden.) Mit der Winkelgeschwindigkeit der Erdumdrehung, $\vec{\Omega}_0$, $|\vec{\Omega}_0| \approx 1,2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{s}$, ist die Coriolis-Kraft \vec{F}_C (pro Masse) gegeben durch:

$$\vec{F}_C = 2\vec{u} \times \vec{\Omega}_0. \quad (4.45)$$

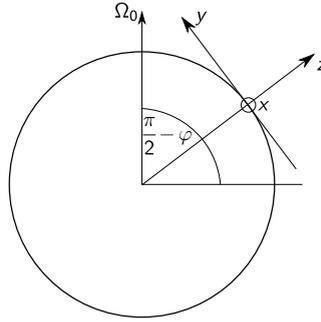


Abbildung 4.6: Rotierendes kartesisches Koordinatensystem.

Es wird ein mitrotierendes kartesisches Koordinatensystem entsprechend der Abbildung 4.6 gewählt, d.h., es wird eine Tangentialebene unter dem Winkel φ nördlicher Breite an die Erdoberfläche gelegt. In diesem System sind die Schwerkraft \vec{F}_g (pro Masse) und die Winkelgeschwindigkeit gegeben durch:

$$\vec{F}_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}, \quad (4.46)$$

$$\vec{\Omega}_0 = |\vec{\Omega}_0| \cdot \left[\underbrace{\cos(\varphi)}_{\sin(\frac{\pi}{2}-\varphi)} \vec{j} + \underbrace{\sin(\varphi)}_{\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi)} \vec{k} \right], \quad (4.47)$$

wobei \vec{j} und \vec{k} die Einheitsvektoren in y- und z-Richtung bezeichnen. Unter Berücksichtigung von

$$\vec{u} \times \vec{\Omega}_0 = \begin{pmatrix} v \sin(\varphi) - w \cos(\varphi) \\ -u \sin(\varphi) \\ u \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot |\Omega_0| \quad (4.48)$$

ergibt sich für die drei Komponenten der Euler-Gleichung:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2|\vec{\Omega}_0| \cdot v \sin(\varphi) - 2|\vec{\Omega}_0| w \cos(\varphi), \quad (4.49)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2|\vec{\Omega}_0| \cdot u \sin(\varphi), \quad (4.50)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + 2|\vec{\Omega}_0| \cdot u \cos(\varphi) - g \approx -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g. \quad (4.51)$$

In der letzten Gleichung wurde ausgenutzt, dass $2|\Omega_0|u \cos(\varphi)/g \ll 1$. Dies sind Grundgleichungen der Meteorologie für kleinräumige Untersuchungen.

Falls Trägheitskräfte gegenüber der Coriolis-Kraft vernachlässigbar sind, besteht bei stationärer Strömung in der Tangentialebene ein Kräftegleichgewicht zwischen Druckkräften und der Coriolis-Kraft. Da die Coriolis-Kraft grundsätzlich senkrecht zur Strömungsrichtung wirkt, gilt dies dann auch für den Druckgradienten. Daraus folgt, dass der Druck längs Stromlinien konstant ist. Solche Strömungen sind typisch für manche großräumigen Bewegungen in der Atmosphäre. Sie werden als **geostrophischer Wind** bezeichnet. Auf Wetterkarten erfolgen entsprechende Luftbewegungen näherungsweise parallel zu den Isobaren. Auf der Nordhalbkugel wird ein Hochdruckgebiet im und ein Tiefdruckgebiet gegen den Uhrzeigersinn umlaufen.

Euler-Gleichung in natürlichen Koordinaten

In Vorbereitung auf die Ableitung der Bernoulli-Gleichung geben wir hier noch die Euler-Gleichung in natürlichen Koordinaten an. Dazu betrachten wir das Stromlinienbild zu einem Zeitpunkt $t = t_0$, vgl. Abbildung 4.7a. An einem Ort auf einer

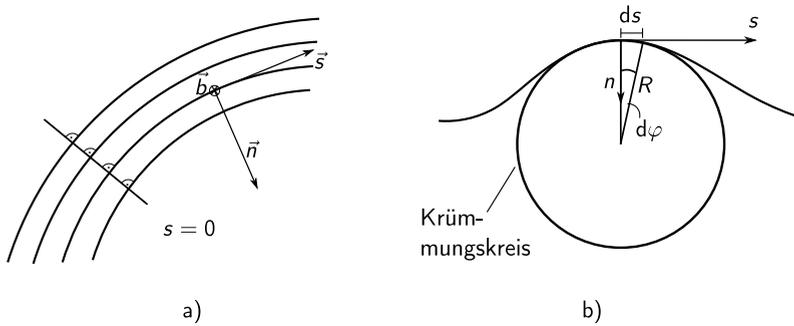


Abbildung 4.7: Natürliche Koordinaten a) Koordinatensystem an einem Ort im Stromlinienfeld, b) einzelne Stromlinie mit Krümmungskreis.

Stromlinie wird ein Koordinatensystem durch die drei Einheitsvektoren \vec{s} , \vec{n} und \vec{b} definiert. Dabei bezeichnet

- \vec{s} den Einheitsvektor für die Stromlinienkoordinate s , am betrachteten Ort ist \vec{s} tangential zur Stromlinie,
- \vec{n} die Normale, die am betrachteten Ort in Richtung des Krümmungsmittelpunktes der Stromlinie zeigt,
- $\vec{b} = \vec{s} \times \vec{n}$ die Binormale, diese steht orthogonal auf \vec{s} und \vec{n} .

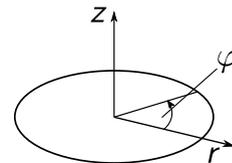


Abbildung 4.8: Zylinderkoordinaten.

Die Geschwindigkeitskomponenten sind wie folgt definiert:

- v in Richtung \vec{s} ,
- u in Richtung $-\vec{n}$,
- w in Richtung \vec{b} , es gilt $w \equiv 0$.

In Abbildung 4.7b betrachten wir nun eine einzelne Stromlinie. Lokal können wir die Euler-Gleichungen in Zylinderkoordinaten (Notation siehe Abbildung 4.8) schreiben:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + F_r, \quad (4.52)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + F_\varphi, \quad (4.53)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + F_w. \quad (4.54)$$

In natürlichen Koordinaten ist $u = 0$, $w = 0$, $\vec{n} = -\vec{r}$, $r d\varphi = ds$, $\frac{\partial u}{\partial s} = 0$. Damit erhalten wir aus den Euler-Gleichungen eine Gleichung für die Richtung normal zur Stromlinie und eine Gleichung für die Richtung tangential zur Stromlinie

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{v^2}{R} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} - F_n, \quad (4.55)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + F_s. \quad (4.56)$$

Die dritte Gleichung (4.54) beschreibt ein Gleichgewicht zwischen Druck- und äußeren Kräften in Binormalenrichtung, das hier nicht von Interesse und daher nicht mit aufgeführt ist. Für stationäre Strömungen ohne äußere Kräfte lassen sich aus Gleichung (4.55) folgende Schlussfolgerungen ziehen:

- Der Druck wächst vom Krümmungsmittelpunkt nach außen.
- In Parallelströmungen gilt für den Krümmungsradius $R \rightarrow \infty$ und daher $\frac{\partial p}{\partial n} \rightarrow 0$.

In stationären **Parallelströmungen** ohne äußere Kräfte ändert sich der Druck nicht quer zur Strömungsrichtung.

Die Integration von Gleichung (4.56), auch instationär und mit äußeren Kräften, führt zur Bernoulli-Gleichung.

4.2.2 Bernoulli-Gleichung

Im Folgenden gehen wir davon aus, dass äußere Kräfte konservativ sind, also ein Potential U besitzen, und dass die Dichte allein vom Druck abhängt. Letzteres wird **Barotropie** genannt und genügt häufig, um den Zusammenhang zwischen Druck und Dichte anzugeben. Weiterhin führen wir eine Druckfunktion P ein, die im Fall von Barotropie allein vom Druck p abhängt. Zusammenfassend gehen wir im Folgenden aus von:

- Barotropie:
$$\rho = \rho(p), \quad (4.57)$$

- Definition:
$$P := \int \frac{dp}{\rho}, \quad dP = \frac{1}{\rho} dp, \quad (4.58)$$

- äußere Kräfte haben ein Potential:
$$\vec{F} = \nabla U. \quad (4.59)$$

Wir betrachten nun von den Euler-Gleichungen in natürlichen Koordinaten die Gleichung für die Geschwindigkeit in Stromlinienrichtung, Gleichung (4.56). Die Geschwindigkeit in diese Richtung ist gleich dem gesamten Geschwindigkeitsbetrag, also $v = |\vec{u}|$. Unter Berücksichtigung der Gleichungen 4.58 und 4.59 erhalten wir:

$$\boxed{\frac{\partial |\vec{u}|}{\partial t} + |\vec{u}| \frac{\partial |\vec{u}|}{\partial s} = \frac{\partial |\vec{u}|}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial |\vec{u}|^2}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} (U - P).} \quad (4.60)$$

Wir unterscheiden im Folgenden zwischen stationären und drehungsfreien Strömungen. Dabei bezeichnen wir den Geschwindigkeitsbetrag von nun an mit $u = |\vec{u}|$ (statt mit der Stromlinienkomponente v).

Stationäre Strömung Gleichung (4.60) wird entlang einer Stromlinie integriert:

$$\int \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial s} ds = \int \frac{\partial}{\partial s} (U - P) ds. \quad (4.61)$$

Man erhält die

Bernoulli-Gleichung für stationäre Strömungen

$$P + \frac{u^2}{2} - U = C. \quad (4.62)$$

C ist eine Integrationskonstante, die entlang von Stromlinien, aber nicht notwendigerweise im gesamten Strömungsfeld, konstant ist. Zum Beispiel können

verschiedene Konstanten C beim Zusammenfluss von Strömungen auftreten, die aus unterschiedlichen Gebieten kommen (z.B.: Rio Negro und Amazonas, Atem- und Raumluft).

Drehungsfreie Strömung In drehungsfreien Strömungen existiert ein Geschwindigkeitspotential ϕ mit $\vec{u} = \text{grad } \phi$. Damit kann Gleichung (4.60) wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} u^2 + P - U \right) = 0. \quad (4.63)$$

Nach Integration entlang einer Stromlinie erhält man die

Bernoulli-Gleichung für drehungsfreie Strömungen

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + P - U = f(t). \quad (4.64)$$

Hierbei ist $f(t)$ eine Integrationskonstante, die im Allgemeinen zeitabhängig ist, zum Beispiel bei einer Variation des Druckes durch äußere Einwirkungen. Im Fall stationärer Randbedingungen hingegen ist $f(t) = \text{const.}$

Bernoulli-Gleichung (stationär) über Energieerhaltung

Die Bernoulli-Gleichung für stationäre bzw. drehungsfreie Strömungen wurde über die Integration der Euler-Gleichung entlang einer Stromlinie gewonnen. Die Euler-Gleichung beschreibt die zeitliche Änderung von Impuls aufgrund angreifender Kräfte. Daher handelt es sich bei der Bernoulli-Gleichung um eine Energiegleichung. Die stationäre Form der Bernoulli-Gleichung lässt sich auch einfach direkt über Energieerhaltung in einer Stromröhre ableiten. Wir betrachten dazu die inkompressible Strömung durch eine horizontale Stromröhre mit veränderlicher Querschnittsfläche (siehe Abbildung 4.9). In einem Zeitintervall Δt muss aus Kontinuitätsgründen durch jede Querschnittsfläche das gleiche Volumen strömen, also gilt an den Flächen A_1 und A_2 :

$$\Delta V = A_1 \Delta x_1 = A_2 \Delta x_2 \quad (4.65)$$

mit $\Delta x_1 = u_1 \Delta t$, und u_1 als Geschwindigkeit bei A_1 (Δx_2 entsprechend). Durch die Drücke p_1 und p_2 wird dabei folgende Arbeit ΔW verrichtet:

$$\Delta W_1 = p_1 A_1 \Delta x_1 = p_1 \Delta V, \quad (4.66)$$

$$\Delta W_2 = p_2 A_2 \Delta x_2 = p_2 \Delta V. \quad (4.67)$$

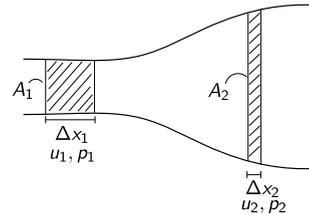


Abbildung 4.9: Stromröhre mit variablem Querschnitt.

Wieder aus Kontinuitätsgründen sind die Geschwindigkeiten an den beiden Flächen unterschiedlich groß. Das gilt entsprechend auch für die kinetische Energie. Unterschiede in der kinetischen Energie müssen hier, da keine weiteren Energien (Kräftepotentiale) betrachtet werden, durch entsprechende Unterschiede in den Arbeiten ausgeglichen werden:

$$\Delta W_1 - \Delta W_2 = (p_1 - p_2)\Delta V = \frac{1}{2}\rho\Delta V(u_2^2 - u_1^2). \quad (4.68)$$

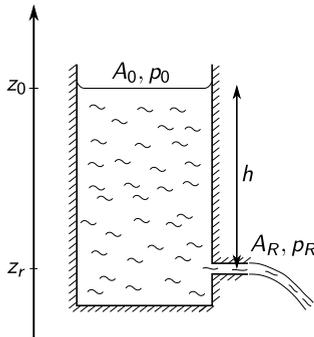
Daraus folgt sofort die Bernoulli-Gleichung für stationäre Strömung ohne äußere Kraft in ihrer vielleicht bekanntesten, aber auch eingeschränktesten Form:

$$p + \frac{1}{2}\rho u^2 = \text{const} = p_0. \quad (4.69)$$

Die Konstante p_0 bezeichnet den Druck an einem Ort, an dem die Geschwindigkeit verschwindet, also z.B. in einem großen Reservoir, aus dem die Strömung und damit auch die Stromröhre kommt.

4.2.3 Bernoulli-Gleichung: Beispiele

i) Ausfluss einer Flüssigkeit aus einem Gefäß:



Flüssigkeit inkompressibel: $P = p/\rho,$

Schwerepotential: $U = -g \cdot z,$

Bernoulli-Gleichung (stationär): $p + \frac{\rho}{2}u^2 + \rho gz = C,$

Randbedingungen:
(A_R : Rohrquerschnitt,
 A_O : Flüssigkeitsoberfläche) $A_R \ll A_O,$

Kontinuität: $u_O A_O = u_R A_R,$

Geschwindigkeiten:
(quasistationäre Strömung) $u_R^2 \gg u_O^2 \approx 0,$

Druck: Sowohl an Flüssigkeitsoberfläche (bei A_O) als auch am Rohrende herrscht atmosphärischer Druck p_0 .

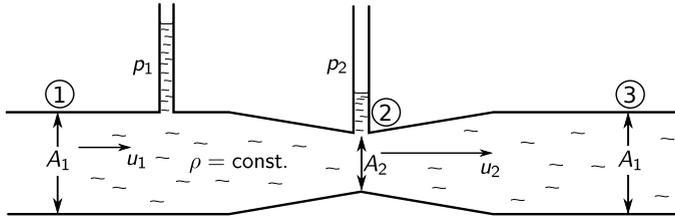
Damit gilt: $p_0 + 0 + \rho g z_0 = p_0 + \frac{\rho}{2}u_R^2 + \rho g z_R.$

Torricelli'sches Ausflusstheorem

$$u_R = \sqrt{2g(z_O - z_R)} = \sqrt{2gh}. \quad (4.70)$$

Die Bernoulli-Gleichung ist eine Energiegleichung: Entlang einer Stromlinie von der Flüssigkeitsoberfläche (A_0), an der die Geschwindigkeit praktisch null ist, bis zum Austritt des Flüssigkeitsstrahls aus dem Rohrende wird die potentielle Energie, ρgh , vollständig in kinetische Energie, $\rho/2 u^2$, umgewandelt.

ii) Venturi-Rohr (Volumenstrommessung):



Bernoulli-Gleichung, stationär ohne Schwerkraft $\Rightarrow \Delta p = p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}(u_2^2 - u_1^2)$,
 Kontinuität: $u_1 A_1 = u_2 A_2 = \dot{V}$ (Volumenstrom) $\Rightarrow \Delta p = \frac{\rho}{2} u_2^2 \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right]$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{V} = A_2 u_2 = A_2 \sqrt{2 \frac{\Delta p}{\rho} \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right]^{-1}}} \quad (4.71)$$

iii) Schwingung einer Flüssigkeit im U-Rohr:

Beispiel für die Bernoulli-Gleichung für instationäre Strömungen:

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U \right) = 0. \quad (4.72)$$

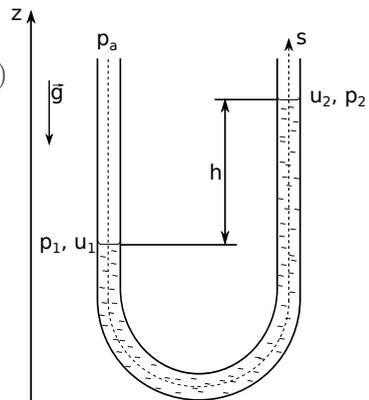
Länge der Flüssigkeitssäule: l ,

Druck im umgebenden Gas: p_a ,

Kraftpotential (Schwerkraft): $U = -gz$,

Damit folgt aus Gleichung (4.72):

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial u}{\partial t} ds + \frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} - \frac{p_1}{\rho} + g \cdot h = 0. \quad (4.73)$$



Es ist: $u(s) = u_1 = u_2 = \frac{1}{2}\dot{h}$ und $p_1 = p_2 = p_a$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ddot{h} \cdot l + g \cdot h = 0, \quad \text{also: } \ddot{h} + \frac{g}{l/2} \cdot h = 0.$$

Dies ist eine Schwingungsgleichung, Lösung:

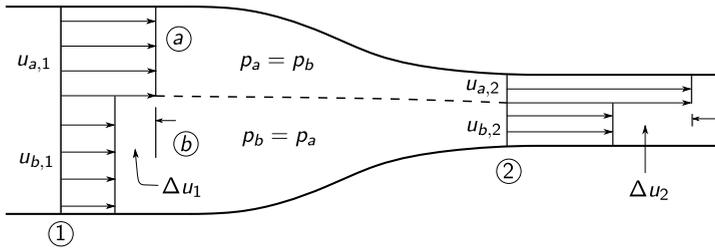
$$h = h_0 \cdot \exp\left(i \cdot \sqrt{\frac{g}{l/2}} \cdot t\right). \quad (4.74)$$

Die Periodendauer der Schwingung der Wassersäule entspricht der eines mathematischen Pendels der Länge $l/2$.

iv) Parallelströmungen:

In Parallelströmungen gilt für den Krümmungsradius R der Stromlinien $R \rightarrow \infty$ und damit $\frac{\partial p}{\partial n} \rightarrow 0$ (vgl. Euler-Gleichung in natürlichen Koordinaten, Kapitel 4.2.1). In Parallelströmungen ändert sich der Druck nicht quer zur Strömungsrichtung. Falls in einer Parallelströmung die Geschwindigkeit auf verschiedenen Stromlinien unterschiedlich ist, so ist dies daher auch die Bernoulli-Konstante.

Anwendung: Ausgleich von Geschwindigkeitsunterschieden im Windkanal mittels einer Düse.



Parallelströmung: $p_{a,1} = p_{b,1} = p_1, \quad p_{a,2} = p_{b,2} = p_2.$

Bernoulli-Gleichung für die Teilströme a und b:

$$\frac{\rho}{2}u_{a,2}^2 - \frac{\rho}{2}u_{a,1}^2 = p_1 - p_2 \quad \text{und} \quad \frac{\rho}{2}u_{b,2}^2 - \frac{\rho}{2}u_{b,1}^2 = p_1 - p_2. \quad (4.75)$$

Nach Gleichsetzen der linken Seiten folgt:

$$u_{a,2}^2 - u_{b,2}^2 + u_{b,1}^2 - u_{a,1}^2 = 0 \Rightarrow (u_{a,2} - u_{b,2})(u_{a,2} + u_{b,2}) = (u_{a,1} - u_{b,1})(u_{a,1} + u_{b,1}) \quad (4.76)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta u_2}{\Delta u_1} = \frac{u_{a,2} - u_{b,2}}{u_{a,1} - u_{b,1}} = \frac{u_{a,1} + u_{b,1}}{u_{a,2} + u_{b,2}}. \quad (4.77)$$

Die Geschwindigkeitsänderung hat gleiches Vorzeichen für beide Teilströme, wegen Kontinuität hier Geschwindigkeitszunahme (vgl. Abbildung). Daraus folgt:

$$u_{a,1} + u_{b,1} < u_{a,2} + u_{b,2} \quad \text{und mit Gleichung (4.77):} \quad \frac{\Delta u_2}{\Delta u_1} < 1. \quad (4.78)$$

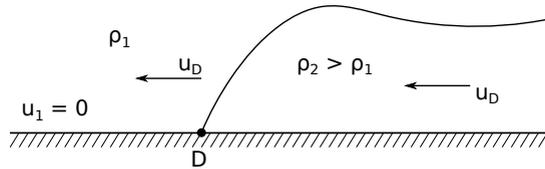
Für kleine Geschwindigkeitsunterschiede („Störungen“): $u_{a,i} \approx u_{b,i} = u_i$, $i = 1, 2$, und mit $u_1 \cdot A_1 = u_2 \cdot A_2$ erhält man schließlich

$$\frac{\Delta u_2}{\Delta u_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{A_2}{A_1} < 1, \quad \text{bzw. relativ:} \quad \boxed{\frac{\Delta u_2/u_2}{\Delta u_1/u_1} = \frac{u_1^2}{u_2^2} = \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 < 1.} \quad (4.79)$$

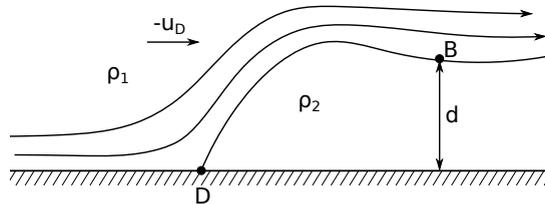
Eine Windkanaldüse bewirkt neben einer Beschleunigung der Strömung auch eine Verringerung der (relativen) Störungen in der Längsgeschwindigkeit.

v) Dichteströmung (nach von Karman):

Ausbreitung einer Gaswolke mit erhöhter Dichte im Schwerfeld der Erde (z.B. „Chemieunfall“ oder Sediment-/Staubwolke, vgl. Abbildung 4.10):



Die instationäre Strömung ist stationär im Bezugssystem der Front (D) (Überlagerung von $-u_D$). Stationär ist D ein Staupunkt (siehe nächstes Kapitel 4.2.4), die Geschwindigkeit bei D verschwindet:



es ist: $p_D = p_B + \rho_1 g d + \frac{\rho_1}{2} u_D^2$ (Stromlinie von D nach B in Fluid 1),
 $p_D = p_B + \rho_2 g d$ (Stromlinie von D nach B in Fluid 2).

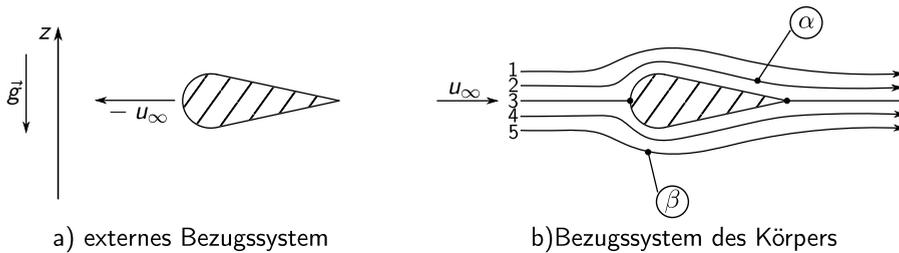
Für die Geschwindigkeit der Front erhält man:

$$\boxed{u_d = \sqrt{\frac{2g(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1} d}.} \quad (4.80)$$



Abbildung 4.10: Dichteströmung: Sandsturm (Habub) in Texas (Leaflet, CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons).

vi) Umströmung eines festen Körpers:



Der Körper bewegt sich durch Flüssigkeit mit hydrostatischer Druckverteilung:

$$p = p_0 - \rho g z. \quad (4.81)$$

Weit vom Körper gilt daher auf Stromlinie „ i “:

$$p_i + \rho g z_i = p_0 = \text{const.} \quad (4.82)$$

Addiere $\rho/2 u_\infty^2$ (Bezugssystem Körper), weit vom Körper gilt dann:

$$p_i + \frac{\rho}{2} u_\infty^2 + \rho g z_i = p_0 + \frac{\rho}{2} u_\infty^2 = \text{const}, \quad (4.83)$$

z.B. auch auf Stromlinien 2 und 5 (s.o.) und darauf liegenden Punkten α und β :

$$p_2 + \frac{\rho}{2} u_\infty^2 + \rho g z_2 = p_\alpha + \frac{\rho}{2} u_\alpha^2 + \rho g z_\alpha = \text{const} \quad (4.84)$$

$$\parallel$$

$$p_5 + \frac{\rho}{2} u_\infty^2 + \rho g z_5 = p_\beta + \frac{\rho}{2} u_\beta^2 + \rho g z_\beta = \text{const.} \quad (4.85)$$

Die Bernoulli-Konstante ist hier überall gleich. Daher verknüpft die Bernoulli-Gleichung auch die Punkte α und β , die nicht auf der gleichen Stromlinie liegen, miteinander:

$$p_\alpha + \frac{\rho}{2}u_\alpha^2 + \rho gz_\alpha = p_\beta + \frac{\rho}{2}u_\beta^2 + \rho gz_\beta. \quad (4.86)$$

4.2.4 Definitionen

Bei der Umströmung eines Körpers unterscheiden sich einzelne Stromlinien und einzelne Punkte auf der Körperoberfläche von den anderen. Wir betrachten dazu in Abbildung 4.11 eine inkompressible Strömung ohne äußere Kräfte und definieren:

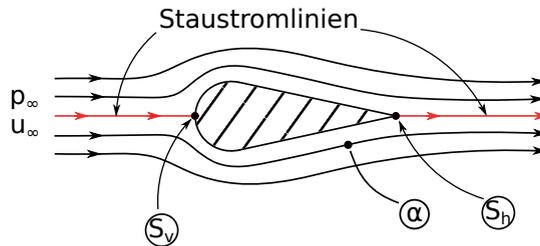


Abbildung 4.11: Umströmung eines Körpers: Staupunkte und Staustromlinien.

- **Staupunkt** (*stagnation point*): Punkt auf Körperoberfläche, an dem eine Stromlinie endet / beginnt, dort gilt $u = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
 S_v / S_h : vorderer / hinterer Staupunkt,
- **Stau(punkt)stromlinien**: führen auf den Staupunkt zu bzw. von ihm weg, am Staupunkt (Index „s“) gilt:

$$p_s = p_s + \frac{\rho}{2} \cdot 0 = p_\infty + \frac{\rho}{2}u_\infty^2 = p_\alpha + \frac{\rho}{2}u_\alpha^2, \quad (4.87)$$

- **Gesamtdruck (Pitot-Druck)** (*stagnation/total pressure*): maximaler Druck, gegeben durch p_s ,
- **dynamischer Druck / Staudruck** (*dynamic pressure*): Druckanstieg, zwischen einem Ort α und dem Staupunkt (kinetische Energie pro Volumen):

$$p_s - p_\alpha = \frac{\rho}{2}u_\alpha^2, \quad (4.88)$$

- **statischer Druck** (*static pressure*): physikalischer Druck, am Ort α : p_α .

4.2.5 Druckmessung

Die drei im letzten Abschnitt definierten Drücke lassen sich mit einfachen Anordnungen bestimmen. Den Gesamtdruck misst man direkt an einem Staupunkt, z.B. am vorderen Ende eines parallel zur Anströmung ausgerichteten Rohrs, dem sogenannten **Pitot-Rohr**, siehe Abbildung 4.12. Für den statischen Druck benötigt man eine Druckmessstelle an einer Stelle, an der die Strömung durch das Messgerät praktisch nicht gestört wird. Dies ist z.B. der Fall, wenn die Druckmessstelle seitlich an einem umströmten Rohr angebracht ist, das wieder parallel zur Anströmung ausgerichtet ist. Um Störungen von der Umströmung des vorderen Rohrendes zu vermeiden, muss die statische Druckmessstelle dabei weit genug vom vorderen Rohrende liegen. Die Differenz dieser beiden direkt messbaren Drücke ergibt den Staudruck, aus dem man dann, bei bekannter Dichte, direkt die Geschwindigkeit erhält. Dies wird beim **Prandtl'schen Staurohr** ausgenutzt, siehe Abbildung 4.13.

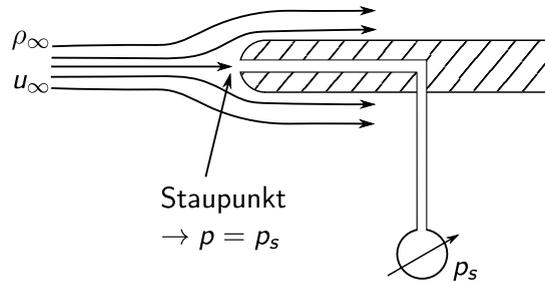


Abbildung 4.12: Pitot-Rohr zur Messung des Gesamtdrucks.

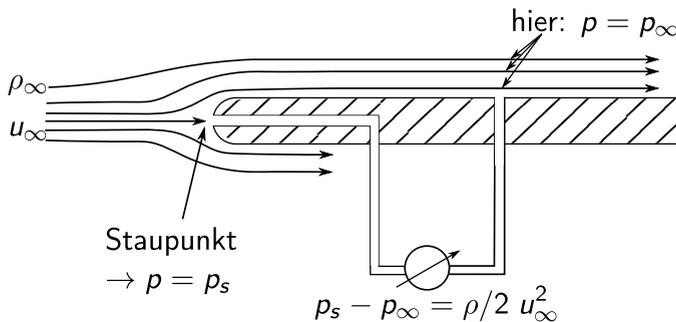


Abbildung 4.13: Prandtl'sches Staurohr / Prandtl-Sonde, zur Messung des Staudrucks / dynamischen Drucks.

4.3 Ähnlichkeitsbetrachtungen

Eine erste Ähnlichkeitsbetrachtung haben wir bereits in Kapitel 1.4.2 am Beispiel der Rohrströmung kennengelernt. Dabei stellte sich die Reynolds-Zahl als eine entscheidende dimensionslose Größe heraus, von der wir sehen werden, dass sie nicht nur für die Rohrströmung, sondern ganz allgemein in der Strömungsmechanik von größter Bedeutung ist. Ähnlichkeitsbetrachtungen spielen auch in anderen Fällen eine Rolle:

- Die Lösung der Navier-Stokes-Gleichung ist im Allgemeinen schwierig. Es gibt jedoch Fälle, in denen sich aufgrund der speziellen Problemstellung die unabhängigen Variablen derart transformieren lassen, dass man nur noch eine Abhängigkeit von einer unabhängigen **Ähnlichkeitsvariablen** erhält. Die partielle Navier-Stokes-Gleichung wird dann zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung, die leichter zu lösen ist. Dies werden wir an geeigneten Stellen anwenden (vgl. Kapitel 4.4.iii, 7.3).
- Experimentelle Untersuchungen werden oft an kleinen Modellen durchgeführt. Wann sind die gewonnenen Ergebnisse auf die Großausführung übertragbar?
- Bei der Durchführung von Experimenten lässt sich der Aufwand durch „intelligente“ Konzepte, die auf einer Dimensionsanalyse beruhen, verringern.

4.3.1 Navier-Stokes-Gleichungen entdimensionalisiert; Kennzahlen

In diesem Abschnitt werden wir die Navier-Stokes-Gleichungen in dimensionsloser Form angeben. Die Einheiten der Größen in den Navier-Stokes-Gleichungen setzen sich aus den Grundeinheiten für Masse, Länge und Zeit (kg, m, s) zusammen. Neben Länge und Zeit, die in den Ableitungen explizit auftreten, kommen noch Druck ($\text{Pa} = \text{kg}/(\text{ms}^2)$), Geschwindigkeit (m/s), Dichte (kg/m^3), dynamische Zähigkeit ($\text{Ns}/\text{m}^2 = \text{kg}/(\text{ms})$) und Beschleunigung (m/s^2) vor. Referenzgrößen mit Grundeinheiten sind gewöhnlich jedoch nur für die Länge vorhanden, eventuell noch für die Zeit. Es werden daher auch Referenzgrößen mit anderen Einheiten für die Entdimensionalisierung benötigt:

- Referenzlänge: L ,
- Referenzgeschwindigkeit: U (ersetzt eine Referenzzeit),
- Referenzzeit: T ($T = L/U$, falls es keine explizite Referenzzeit gibt),
- Referenzdruck: ρU^2 (ersetzt eine Referenzmasse).

Unter Verwendung dieser Referenzgrößen können die Navier-Stokes-Gleichungen skaliert werden. Hier führen wir das am Beispiel der Gleichung für die z -Komponente mit Schwerkraft als Repräsentant für eine äußere Kraft durch. Die dimensionsbehaftete Gleichung teilen wir durch eine Beschleunigung, gebildet mit Referenzgrößen und die partielle Zeitableitung erweitern wir mit T/T :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - g. \quad \left| : \frac{U^2}{L} \right. \quad (4.89)$$

Man erhält:

$$\frac{L}{UT} \frac{\partial \frac{w}{U}}{\partial \frac{t}{T}} + \frac{u}{U} \frac{\partial \frac{w}{U}}{\partial \frac{x}{L}} + \dots = -\frac{\partial \frac{p}{\rho U^2}}{\partial \frac{z}{L}} + \frac{\mu}{\rho UL} \left(\frac{\partial^2 \frac{w}{U}}{\partial (\frac{x}{L})^2} + \dots \right) - \frac{Lg}{U^2}. \quad (4.90)$$

Der Faktor vor der Klammer ist gerade der Kehrwert der uns schon bekannten Reynolds-Zahl. Die anderen beiden am Anfang und Ende der Gleichung stehenden weiteren dimensionslosen Gruppen aus Referenzgrößen und Schwerebeschleunigung sind ebenfalls Kennzahlen. Diese sind wie folgt definiert:

Kennzahlen

$$Re := \frac{\rho UL}{\mu} \quad \text{Reynolds-Zahl,} \quad (4.91)$$

$$Fr := \frac{U^2}{Lg} \quad \text{Froude-Zahl,} \quad (4.92)$$

$$Sr := \frac{L}{UT} \quad \text{Strouhal-Zahl (dimensionslose Frequenz).} \quad (4.93)$$

Falls es eine explizite Referenzzeit T gibt, ist die Strouhal-Zahl eine dimensionslose Frequenz. Andernfalls ist $Sr = L/(U(L/U)) = 1$ und der Vorfaktor vor der lokalen Zeitableitung entfällt. Bezeichnet man dimensionslose Variablen mit einer Tilde, z.B. $\tilde{g} = g/g_{\text{ref}}$, so erhält man die entdimensionalisierte Navier-Stokes-Gleichung (hier nur z -Komponente) zu

$$Sr \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{z}^2} \right] - \frac{1}{Fr}. \quad (4.94)$$

Die genaue Form der Gleichung, und damit auch ihre Lösung, hängt von den drei Kennzahlen Re , Sr , und Fr ab. Es gilt:

Bei geometrisch ähnlichen Randbedingungen eines Strömungsfeldes sind auch die Strömungen ähnlich (das heißt an ähnlichen Orten ist auch die Strömungsgeschwindigkeit ähnlich), wenn die Kennzahlen gleich sind.

Interpretation der Kennzahlen

i) **Kräfteverhältnis** Die Größenordnungen der in der Navier-Stokes-Gleichung auftretenden Kräfte (hier pro Volumen) werden wie folgt abgeschätzt:

- **Trägheitskraft:** $\rho(\vec{u}\nabla)\vec{u} \sim \rho\frac{U^2}{L}$,
- **Reibungskraft:** $\mu\Delta\vec{u} \sim \mu\frac{U}{L^2}$,
- **Schwerkraft:** ρg .

Die Reynolds- und Froude-Zahl können als Verhältnis der Trägheits- zur Reibungs- bzw. Schwerkraft interpretiert werden:

$$\text{Reynolds-Zahl} \sim \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Reibungskraft}}, \quad Re = \frac{\rho\frac{U^2}{L}}{\mu\frac{U}{L^2}} = \frac{\rho UL}{\mu}, \quad (4.95)$$

$$\text{Froude-Zahl} \sim \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Schwerkraft}}, \quad Fr = \frac{\rho\frac{U^2}{L}}{\rho g} = \frac{U^2}{gL}. \quad (4.96)$$

Eine Interpretation der Kennzahlen als Kräfteverhältnis ist nicht immer möglich. Beispielsweise geht dies nicht im Fall der laminaren Rohrströmung, da dort keine Trägheitskräfte auftreten ($(\vec{u}\nabla)\vec{u}$ verschwindet).

ii) **Verhältnis von Energien** Größenordnungen von kinetischer und potentieller Energie (pro Volumen) sind:

- **kinetische Energie:** ρU^2 ,
- **potentielle Energie:** $\rho g L$.

Damit lässt sich die Froude-Zahl als Verhältnis von kinetischer und potentieller Energie interpretieren:

$$\text{Froude-Zahl} \sim \frac{\text{kinetische Energie}}{\text{potentielle Energie}}, \quad Fr = \frac{\rho U^2}{\rho g L} = \frac{U^2}{gL}. \quad (4.97)$$

Auch die Reynolds-Zahl lässt sich als Verhältnis von Energien deuten. Dabei wird die in einem Zeitintervall $\Delta t = L/U$ dissipierte Energie mit der kinetischen Energie verglichen. Dissipation bezeichnet den Teil an kinetischer Energie, der pro Zeit durch Reibung in Wärme umgewandelt wird. Dissipation wird in Kapitel 6.1 behandelt. Es ist:

$$\text{Reynolds-Zahl} \sim \frac{\text{kinetische Energie}}{\text{dissipierte Energie}}, \quad Re = \frac{\rho U^2}{\mu\frac{U}{L}} = \frac{\rho UL}{\mu}. \quad (4.98)$$

iii) **Verhältnis charakteristischer Zeitskalen** Folgende Zeitskalen werden miteinander verglichen:

- **charakteristische strömungsmechanische Zeit:** $t_{\text{Str}} = \frac{L}{U}$,
- **explizite Zeit (z.B. von außen aufgeprägt):** $t_{\text{expl}} = T$,
- **charakteristische Zeit für Reibungseffekte:** $t_{\nu} = \frac{L^2 \rho}{\mu} = \frac{L^2}{\nu}$.

Reynolds- und Strouhal-Zahl ergeben sich als Verhältnisse dieser Zeitskalen:

$$\text{Reynolds-Zahl} \sim \frac{\text{char. Zeit f. Reibungseffekte}}{\text{strömungsmechanische Zeit}}, \quad Re = \frac{L^2 U}{\nu L} = \frac{\rho L U}{\mu}, \quad (4.99)$$

$$\text{Strouhal-Zahl} \sim \frac{\text{strömungsmechanische Zeit}}{\text{explizite Zeit}}, \quad Sr = \frac{L}{UT}. \quad (4.100)$$

4.3.2 Dimensionsanalyse

In Kapitel 1.4.2 hatten wir bereits festgestellt, dass für ähnliches strömungsmechanisches Verhalten neben **geometrischer** auch die **dynamische** Ähnlichkeit berücksichtigt werden muss. Ein weiterer Punkt betrifft die **physikalischen Dimensionen** der Größen, die für ein betrachtetes Problem bestimmend sind. Nur geeignete Kombinationen dieser Größen liefern dimensionsmäßig sinnvolle Aussagen. Wie man dies bei einer Untersuchung ausnutzen kann, wird im folgenden Beispiel demonstriert.

Beispiel: Rohrströmung Es wird erneut die Rohrströmung aus Abschnitt 1.4.2 betrachtet. Gesucht wird die Abhängigkeit des Durchflusses von verschiedenen Parametern. Als wichtigste den Durchfluss bestimmende Parameter wählen wir wieder neben Länge l und Radius R des Rohres die dynamische Viskosität μ , die Dichte ρ und die Druckdifferenz $\Delta p = p_a - p_e$, siehe Abbildung 4.14. Der Durchfluss $Q = \pi R^2 \bar{u}$, das Produkt aus mittlerer Geschwindigkeit \bar{u} und der Querschnittsfläche des Rohres, ist dann eine Funktion von 5 Parametern:

$$Q = f(\mu, \rho, R, l, \Delta p). \quad (4.101)$$

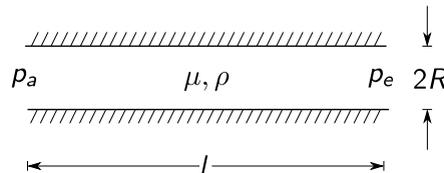


Abbildung 4.14: Rohrströmung: Bezeichnungen.

In einer experimentellen Untersuchung kann man nun auf zwei Weisen vorgehen:

- *brute-force*-Methode: Variation aller Parameter, zum Beispiel 10 Werte pro Parameter $\rightarrow 10^5$ Versuche!
- Berücksichtigung der Dimensionen der Parameter: neben der Geometrie stellt sich die Reynolds-Zahl als entscheidender Parameter heraus (vgl. Abschnitt 1.4.2) $\rightarrow 10^2$ Versuche!

Die in Gleichung (4.101) vorkommenden Größen haben die folgenden physikalischen Dimensionen, hier ausgedrückt durch Grundeinheiten für Länge (L), Zeit (T) und Masse (M):

$$[Q] = \frac{L^3}{T}, \quad [\mu] = \frac{M}{LT}, \quad [\rho] = \frac{M}{L^3}, \quad [R] = L, \quad [l] = L, \quad [\Delta p] = \frac{M}{LT^2}. \quad (4.102)$$

Das Durchflussgesetz (4.101) gilt auch bei anders gewählten Einheiten, wenn man also z.B. die Grundeinheiten L , T und M durch neue Einheiten L' , T' und M' (nun nicht mehr für Länge, Zeit und Masse) wie folgt ersetzt:

$$L' = \frac{L}{\alpha}, \quad T' = \frac{T}{\beta}, \quad M' = \frac{M}{\gamma}. \quad (4.103)$$

Hier bezeichnen α , β und γ noch geschickt zu wählende Umrechnungsfaktoren. Es gilt:

$$Q' = \frac{\beta}{\alpha^3} Q, \quad \mu' = \frac{\alpha\beta}{\gamma} \mu, \quad \rho' = \frac{\alpha^3}{\gamma} \rho, \quad R' = \frac{1}{\alpha} R, \quad l' = \frac{1}{\alpha} l, \quad \Delta p' = \frac{\alpha\beta^2}{\gamma} \Delta p. \quad (4.104)$$

Damit lautet das Durchflussgesetz:

$$Q' = f(\mu', \rho', R', l', \Delta p') \quad (4.105)$$

oder

$$\frac{\beta}{\alpha^3} Q = f\left(\frac{\alpha\beta}{\gamma} \mu, \frac{\alpha^3}{\gamma} \rho, \frac{R}{\alpha}, \frac{l}{\alpha}, \frac{\alpha\beta^2}{\gamma} \Delta p\right). \quad (4.106)$$

An dieser Stelle wählen wir nun Umrechnungsfaktoren derart, dass die Gleichung (4.106) dimensionslos wird. Wie bereits in Kapitel 1.4.2 achten wir dabei darauf, den Druck hier nicht, wie oft üblich, über den dynamischen Druck (und damit über die mittlere Geschwindigkeit) zu skalieren, denn die mittlere Geschwindigkeit steckt bereits im Durchfluss Q und ist, bei bekannter Querschnittsfläche, die Größe, die bestimmt werden soll. Speziell treffen wir hier die folgende Wahl:

$$\alpha = R, \quad \beta = R^2 \frac{\rho}{\mu}, \quad \gamma = \rho R^3. \quad (4.107)$$

Dies ergibt:

$$\boxed{\frac{\rho}{\mu R} Q = f\left(1, 1, 1, \frac{l}{R}, \frac{R^2 \rho}{\mu^2} \Delta p\right)}. \quad (4.108)$$

Mit $Q = \pi R^2 \bar{u}$, $Re := \frac{\rho^2 R \bar{u}}{\mu}$ und Δp bezogen auf die Rohrlänge ($\frac{\Delta p}{l}$) ergibt sich:

$$\frac{\rho}{\mu R} \pi R^2 \bar{u} = \frac{\pi}{2} Re = f\left(1, 1, 1, \frac{l}{R}, \frac{R^2 \rho}{\mu^2} l \frac{\Delta p}{l}\right). \quad (4.109)$$

Dies kann umgeschrieben werden, indem man den Faktor $\pi/2$ in die rechte Seite integriert und die letzte Variable mit $R/(4l)$ multipliziert. Dies führt zu:

$$Re = g\left(1, 1, 1, \frac{l}{R}, \frac{R^3 \rho \Delta p}{4\mu^2 l}\right) \quad (4.110)$$

mit einer neuen Funktion g , die nun nur noch von zwei dimensionslosen Variablen abhängt. Für lange Rohre, also große l/R , spielt die Rohrlänge selbst keine Rolle, sondern nur der Druckgradient, der in der letzten Variablen dimensionslos auftritt. Der hier dimensionsanalytisch gewonnene Zusammenhang ist für laminare Strömungen in Übereinstimmung mit der aus dem Hagen-Poiseuille-Gesetz abgeleiteten Gleichung (1.38) und für turbulente Strömungen mit dem experimentell beobachteten Zusammenhang nach Gleichung (1.39).

Das Beispiel der Rohrströmung zeigt, dass sich grundlegende Zusammenhänge bereits ohne Kenntnis physikalischer Gesetze oder experimenteller Daten aus dimensionsanalytischen Überlegungen ableiten lassen. Dies gilt nicht nur in der Strömungsmechanik, sondern ganz allgemein für Zusammenhänge zwischen dimensionsbehafteten Größen. Die Vorgehensweise ist wie folgt:

Zuerst werden alle n für die betrachtete Problemstellung wesentlichen Parameter p_1, p_2, \dots, p_n ermittelt (z.B. $p_1 = u, p_2 = \mu, \dots$). Dies erfordert ein physikalisches Verständnis für das Problem. Berücksichtigt man zu wenige Parameter, so ist eine korrekte Beschreibung nicht möglich. Berücksichtigt man umgekehrt zu viele Parameter, so erhält man zwar korrekte Aussagen, aufgrund der vielen Parameter sind diese aber nicht unbedingt nützlich. Die Einheiten der n wesentlichen Parameter setzen sich aus einer Anzahl m an Grundeinheiten zusammen (in der Strömungsmechanik typischerweise kg, m, s und evtl. K). Gesucht wird ein funktioneller Zusammenhang zwischen den n Parametern, den wir wie folgt schreiben:

$$f(p_1, p_2, \dots, p_n) = 0. \quad (4.111)$$

Aus den n Parametern werden nun dimensionslose Produkte $\Pi_i, i = 1, 2, \dots$ gebildet, z.B. mit $p_1 = u, p_2 = \rho, p_3 = L$ und $p_4 = \mu$:

$$\Pi_1 = \frac{p_1 p_2 p_3}{p_4} = \frac{u \rho L}{\mu}. \quad (4.112)$$

Es gibt unendlich viele solcher dimensionsloser Produkte, aber nur eine endliche Anzahl k voneinander unabhängiger Produkte. In dimensionsloser Form kann der funktionelle Zusammenhang aus Gleichung (4.111) als funktioneller Zusammenhang zwischen k voneinander unabhängigen dimensionslosen Produkten $\Pi_i, i = 1, \dots, k$, geschrieben werden:

$$F(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k) = 0. \quad (4.113)$$

Auf diese Weise verringert sich in der dimensionslosen Darstellung die Anzahl n der Variablen um die Anzahl m an auftretenden Grundeinheiten auf $k = n - m$. Dies lässt sich mathematisch beweisen und ist als Buckingham'sches Π -Theorem bekannt:

Buckingham'sches Π -Theorem

Eine Funktion f zwischen n dimensionsbehafteten Größen p_1, p_2, \dots, p_n , in denen m unabhängige Grundeinheiten auftreten, kann als eine Funktion F zwischen $k = n - m$ dimensionslosen Argumente $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k$ geschrieben werden. Es gelten dann folgende funktionelle Abhängigkeiten:

$$\begin{aligned} f(p_1, p_2, \dots, p_n) &= 0, \\ F(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k) &= 0. \end{aligned}$$

Im obigen Beispiel der Rohrströmung haben wir den Durchfluss als Funktion von 5 Parametern betrachtet. Insgesamt sind dies $n = 6$ Parameter, die $m = 3$ Grundeinheiten enthalten. Laut Π -Theorem gibt es dann einen funktionellen Zusammenhang zwischen $k = n - m = 3$ dimensionslosen Parametern. Dies stimmt mit unserem Ergebnis (Gleichung (4.110)) überein, das einen Zusammenhang zwischen den folgenden dimensionslosen Größen lieferte: $Re, l/R$ und $\frac{R^3 \rho \Delta p}{4\mu^2 l}$.

Auch das Ergebnis der Entdimensionalisierung der Navier-Stokes-Gleichungen steht in Übereinstimmung mit dem Π -Theorem. Die Gleichungen selbst enthalten die Dichte ρ , die dynamische Viskosität μ und die Schwerebeschleunigung g . Weiterhin haben wir als Referenzgrößen eine Geschwindigkeit U , eine Länge L und eine charakteristische Zeit T verwendet. Insgesamt sind dies wieder $n = 6$ Parameter die $m = 3$ Grundeinheiten enthalten. Zu erwarten ist also, dass die dimensionslose Form der Navier-Stokes-Gleichungen von $k = n - m = 3$ dimensionslosen Produkten abhängt. Dies entspricht unserem Ergebnis (Gleichung (4.94)), in dem die Reynolds-Zahl Re , die Strouhal-Zahl Sr und die Froude-Zahl Fr als 3 voneinander unabhängige Kennzahlen auftreten.

Die dimensionslosen Produkte werden in der Strömungsmechanik als **Kennzahlen** bezeichnet. Neben den in diesen Beispielen genannten gibt es viele weitere

Kennzahlen. Diese können von den bisherigen unabhängig sein, wenn z.B. andere physikalische Phänomene wie Wärmeleitung, Kapillarität oder Kompressibilität betrachtet werden, oder aber durch Kombination bekannter Kennzahlen gebildet werden, z.B. $\Pi = Re/Fr$.

Beispiel: Wellen auf Flüssigkeitsoberflächen

Als weiteres Beispiel der Dimensionsanalyse suchen wir die Phasengeschwindigkeit von Wellen auf einer freien Flüssigkeitsoberfläche, wobei „frei“ bedeutet, dass der Einfluss des Gases über der Flüssigkeit keine Rolle spielt. Als Rückstellkräfte für eine aus der Gleichgewichtslage ausgelenkte Oberfläche berücksichtigen wir die Schwerkraft über die Schwerebeschleunigung g , und die Oberflächenspannung σ . Weitere Größen, die einen Einfluss auf die Phasengeschwindigkeit c haben könnten, sind die Wellenlänge λ , die Dichte der Flüssigkeit ρ und die Flüssigkeitstiefe H , siehe Abbildung 4.15.

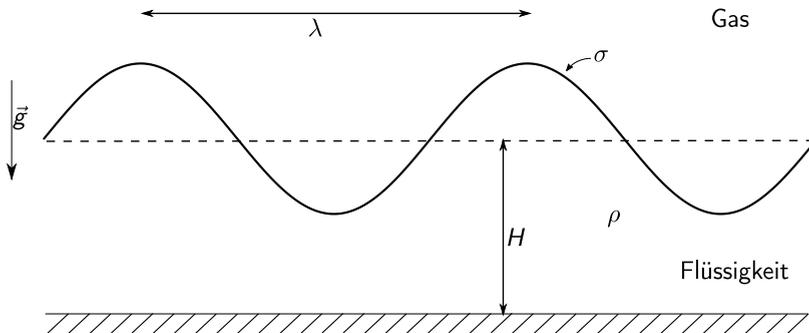


Abbildung 4.15: Oberflächenwellen: Bezeichnungen.

Gesucht ist die Phasengeschwindigkeit als Funktion der anderen genannten Parameter:

$$c = f(\lambda, \rho, g, H, \sigma). \quad (4.114)$$

(Dies kann man leicht in die oben beim Buckingham'schen Π -Theorem verwendete Form bringen, indem man eine neue Funktion $h = f - c = 0$ einführt.) Es liegen hier also $n = 6$ Parameter mit $m = 3$ Grundeinheiten vor:

$$[c] = \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad [\lambda] = \text{m}, \quad [\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad [g] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad [H] = \text{m}, \quad [\sigma] = \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}. \quad (4.115)$$

Laut Π -Theorem gibt es daher $k = n - m = 3$ voneinander unabhängige dimensionslose Produkte, zwischen denen ein funktioneller Zusammenhang besteht:

$$\Pi_1 = F(\Pi_2, \Pi_3). \quad (4.116)$$

Zur Skalierung von Länge, Zeit und Masse bieten sich die folgenden Größen an:

$$\text{Länge: } \lambda, \quad \text{Zeit: } \sqrt{\frac{\lambda}{g}}, \quad \text{Masse: } \rho\lambda^3. \quad (4.117)$$

Nach Skalierung aller Parameter in Gleichung (4.114) mit diesen Größen erhalten wir:

$$\frac{c}{\sqrt{\lambda g}} = f\left(1, 1, 1, \frac{H}{\lambda}, \frac{\sigma}{\rho\lambda^2 g}\right). \quad (4.118)$$

Im Folgenden wollen wir uns auf tiefe Flüssigkeiten beschränken. Dann gilt $H/\lambda \rightarrow \infty$. Die Erwartung ist, dass die Phasengeschwindigkeit dann nicht von H (also dem sich weit unter der Flüssigkeitsoberfläche befindlichen Boden) abhängt und wir nur noch einen Zusammenhang zwischen den beiden dimensionslosen Produkten haben, die H nicht enthalten:

$$\lim_{\lambda/H \rightarrow 0} \frac{c}{\sqrt{\lambda g}} = f_1\left(\frac{\sigma}{\rho\lambda^2 g}\right). \quad (4.119)$$

Weiterhin unterscheiden wir zwischen Fällen, in denen entweder die Schwerkraft oder die Oberflächenspannung unbedeutend ist:

- i) Falls die Schwerkraft keine Rolle spielt, muss die Phasengeschwindigkeit c unabhängig von der Schwerebeschleunigung g sein. Aus Gleichung (4.119) folgt sofort, dass die Funktion f_1 proportional zur Wurzel ihres Argumentes ist (dann steht auf beiden Seiten $1/\sqrt{g}$) und man erhält:

$$f_1 = K_1 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho\lambda^2 g}} \quad \Rightarrow \quad c = K_1 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho\lambda}}. \quad (4.120)$$

Dies ist die Phasengeschwindigkeit von **Kapillarwellen**, bei denen die Rückstellkraft durch die Oberflächenspannung zustande kommt. Die exakte Lösung der Bewegungsgleichungen liefert für den Proportionalitätsfaktor $K_1 = \sqrt{2\pi}$.

- ii) Im umgekehrten Fall, wenn die Oberflächenspannung keine Rolle spielt, erhalten wir entsprechend

$$f_1 = K_2 \quad \Rightarrow \quad c = K_2 \sqrt{\lambda g}. \quad (4.121)$$

Dies ist die Phasengeschwindigkeit von **Schwerewellen** auf tiefen Flüssigkeiten. Die Rückstellkraft ist hier die Schwerkraft. Die exakte Rechnung ergibt für den Proportionalitätsfaktor $K_2 = 1/\sqrt{2\pi}$.

Die Phasengeschwindigkeit sowohl von Kapillar- als auch Schwerewellen ist abhängig von der Wellenlänge. Dies nennt man **Dispersion**. Bei Schwerewellen steigt die Phasengeschwindigkeit mit der Wellenlänge (normale Dispersion) und bei Kapillarwellen nimmt sie mit der Wellenlänge ab (anomale Dispersion).

Im allgemeinen Fall sind sowohl Schwerkraft als auch Oberflächenspannung als Rückstellkräfte zu berücksichtigen. Man spricht dann von **Schwere-Kapillarwellen**. Die Phasengeschwindigkeit von Schwere-Kapillarwellen erhält man über Lösen der Bewegungsgleichungen zu

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + 2\pi\frac{\sigma}{\rho\lambda}}. \quad (4.122)$$

Dieser Zusammenhang für Schwere-Kapillarwellen lässt sich mittels Dimensionsanalyse nicht mehr ableiten. Die Abhängigkeiten der verschiedenen Phasengeschwindigkeiten von der Wellenlänge sind in Abbildung 4.16 skizziert. Das Zusammenspiel von Schwerebeschleunigung und Kapillarität führt dazu, dass es für Schwere-Kapillarwellen eine minimale Phasengeschwindigkeit c_{\min} gibt, die nicht unterschritten wird. Die zugehörige Wellenlänge ist mit λ_{\min} bezeichnet.

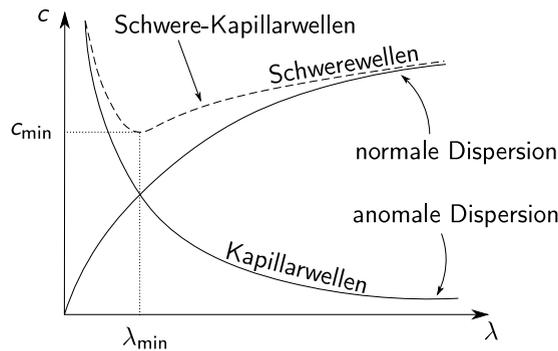


Abbildung 4.16: Phasengeschwindigkeit von Schwere-, Kapillar- und Schwere-Kapillarwellen in Abhängigkeit von der Wellenlänge (skizziert).

4.3.3 Anwendung in der Versuchstechnik

In der Versuchstechnik werden Strömungsvorgänge an kleinen Modellen untersucht, zum Beispiel Flugzeugmodelle in einem Windkanal oder Schiffsmodelle in einem Wasserschleppkanal. Im Idealfall ähnelt die Strömung am Modell der an der interessierenden Großausführung, d.h., dass neben einem ähnlichen Verhalten von

Kräften und Momenten auch physikalische Phänomene wie Grenzschichtablösung oder ein Umschlag von laminarer zu turbulenter Strömung an ähnlichen Orten wie im realen Fall auftreten. Dies ist zu erwarten, wenn im Experiment relevante Kennzahlen die gleichen Werte haben wie im realen Fall. Es ist jedoch oft schwierig und nicht immer möglich, dies zu realisieren, was im Folgenden anhand von Beispielen gezeigt wird. Dabei steht der Index g für die Großausführung und der Index m für das Modell, das im Experiment verwendet wird.

Schiffsmodell im Wasserschleppkanal Der Widerstand von fahrenden Schiffen entsteht durch Reibung am Rumpf und durch die ständige Erzeugung von Wellen. Der Einfluss der Form des Schiffsrumpfs auf den Widerstand lässt sich in einem Wasserschleppkanal untersuchen, siehe Abbildung 4.17. Wir gehen hier davon aus, dass der Widerstand W von den folgenden Parametern abhängt: Größe L und Geschwindigkeit u des Schiffs, Viskosität μ und Dichte ρ des Wassers, sowie

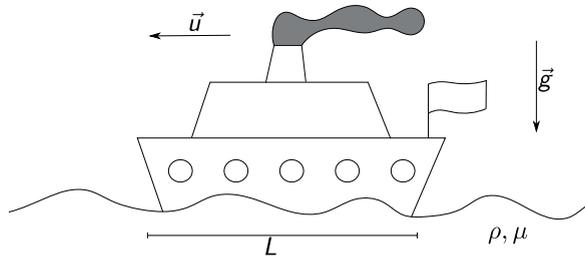


Abbildung 4.17: Schiffmodell im Wasserschleppkanal: Bezeichnungen.

von der Erdbeschleunigung g . Da diese 6 Parameter 3 Grundeinheiten (m, kg, s) enthalten, lässt sich nach dem II-Theorem der Widerstand in dimensionsloser Form als Funktion zweier weiterer Kennzahlen darstellen. In der Strömungsmechanik wird der Widerstand dimensionslos über den **Widerstandsbeiwert** c_w (*drag coefficient*, c_d) ausgedrückt:

$$c_w = \frac{W}{\frac{\rho u^2}{2} S}. \quad (4.123)$$

Der Widerstand wird also durch das Produkt von Staudruck und Stirnfläche S ($S \propto L^2$) des umströmten Körpers skaliert. Als die beiden weiteren Kennzahlen wählen wir die Reynolds- und die Froude-Zahl, die den Einfluss der Viskosität bzw. der Wellen berücksichtigen. Damit ist

$$c_w = c_w(Re, Fr). \quad (4.124)$$

Wir gehen nun von einem Modellversuch im Maßstab 1:100 aus, also gilt:

$$L_m = \frac{1}{100} L_g. \quad (4.125)$$

Im Wasserschleppkanal erwarten wir ein ähnliches Wellenbild wie im Realfall, falls die Froude-Zahlen übereinstimmen, $Fr_g \stackrel{!}{=} Fr_m$. Dies wird als **Froude-Ähnlichkeit** bezeichnet. Es muss also gelten:

$$Fr_m = \frac{u_m^2}{gL_m} = \frac{u_m^2 \cdot 100}{gL_g} \stackrel{!}{=} \frac{u_g^2}{gL_g} = Fr_g \quad (4.126)$$

$$\Rightarrow \boxed{u_m = \frac{1}{10}u_g.} \quad (4.127)$$

Reibungseffekte werden über die Reynolds-Zahl berücksichtigt. Versuche im Schleppkanal werden gewöhnlich in Wasser durchgeführt. Damit ändert sich die kinematische Viskosität der Flüssigkeit, $\nu = \mu/\rho$, im Versuch nicht. Um **Reynolds-Ähnlichkeit**, also $Re_m \stackrel{!}{=} Re_g$, zu erfüllen, kann nur die Geschwindigkeit angepasst werden. Es muss gelten:

$$Re_m = \frac{u_m L_m}{\nu_m} \stackrel{\nu_m = \nu_g}{=} \frac{u_m L_g}{100\nu_g} \stackrel{!}{=} \frac{u_g L_g}{\nu_g} = Re_g \quad (4.128)$$

$$\Rightarrow \boxed{u_m = 100u_g.} \quad (4.129)$$

Ein Vergleich von Gleichung (4.127) und (4.129) zeigt

Froude- und Reynolds-Ähnlichkeit lassen sich nicht gleichzeitig erfüllen!

Bei einem Versuch im Wasserschleppkanal erfüllt man zunächst die Froude-Ähnlichkeit. Reibungseffekte werden dann auf andere Weise, z.B. empirisch oder mittels numerischer Rechenverfahren, erfasst.

Reynolds-Ähnlichkeit bei großen Reynolds-Zahlen Reynolds-Zahlen von Verkehrsflugzeugen im Reiseflug sind sehr groß:

$$Re_g = \frac{\rho u_g L_g}{\mu_g} = \frac{u_g L_g}{\nu_g} \sim \mathcal{O}(10^8 - 10^9). \quad (4.130)$$

Im Modellversuch betrage der Maßstab 1:25, also:

$$L_m = \frac{1}{25}L_g. \quad (4.131)$$

Viele Windkanäle haben eine offene Messstrecke. Dann herrschen dort ungefähr atmosphärische Zustände ($p \sim 10^5 \text{ Pa}$, $T \sim 290 \text{ K}$). Dadurch ist auch der Wert der Viskosität bestimmt. Um Reynolds-Ähnlichkeit zu erreichen, muss gelten:

$$Re_m = \frac{u_m L_m}{\nu_m} = \frac{u_m L_g}{\nu_m 25} \stackrel{!}{=} \frac{u_g L_g}{\nu_g} = Re_g. \quad (4.132)$$

Daraus folgt mit $\nu_m \sim 1/2 \nu_g$ und einer Reisegeschwindigkeit von $u_g \sim 250 \text{ m/s}$:

$$u_m \sim 10u_g = 2500 \frac{\text{m}}{\text{s}} \gg c, \quad (4.133)$$

wobei c die Schallgeschwindigkeit bezeichnet. Für eine Reynolds-Ähnlichkeit wären also (hohe) Überschallgeschwindigkeiten nötig. In Überschallströmung liegt jedoch eine komplett andere Situation vor. Information kann sich nicht mehr vom Flugzeug stromauf ausbreiten, es stellen sich ganz andere Strömungsfelder ein. Wir werden später sehen, dass dann eine weitere Kennzahl (die Mach-Zahl) dazu kommt, über die Kompressibilitätseffekte berücksichtigt werden.

In Windkanälen mit geschlossener Messstrecke besteht die Möglichkeit, nicht nur die Geschwindigkeit, sondern auch die kinematische Viskosität zu ändern. In Hochdruckkanälen werden der Druck und damit auch die Dichte, die in die kinematische Viskosität eingeht, erhöht. Bei einer Erhöhung auf 100 bar erreicht man bei konstant gehaltener Temperatur ($T \sim 290 \text{ K}$) $\nu_m \sim 1/200 \nu_g$ und damit $u_m \sim 1/10 u_g \ll c$. Die Geschwindigkeit liegt im niedrigen Unterschallbereich und die Strömung ist inkompressibel. Um auch Kompressibilitätseffekte zu erfassen, kann man die Viskosität über die Temperatur ändern. In kryogenen Windkanälen lassen sich Temperaturen auf bis auf 100 K absenken, indem man flüssigen Stickstoff einspritzt. Damit erreicht man $\nu_m \sim 1/17 \nu_g$. Die Geschwindigkeit (u_m) ist dann groß und Kompressibilitätseffekte können erfasst werden. In diesem Fall ist es jedoch möglich, dass immer noch $u_m > c$. Eventuell kann eine zusätzliche Druckerhöhung Abhilfe schaffen (falls technisch möglich). Andernfalls muss im Versuch mit reduzierter Reynolds-Zahl gearbeitet werden.

4.4 Analytische Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen

Die Navier-Stokes-Gleichungen bilden ein System gekoppelter, nichtlinearer, partieller Differentialgleichungen. Um diese zu lösen, werden Randbedingungen und, im Fall instationärer Strömungen, Anfangsbedingungen benötigt. Bei einer kleinen Änderung eines Parameters, z.B. der Reynolds-Zahl, können Lösungsverzweigungen auftreten. Lösungen können hysteretisch von diesem Parameter abhängen. Auch bei stationären Randbedingungen sind instationäre Lösungen möglich. Dies können turbulente Strömungen sein oder auch Schwingungen des gesamten Strömungsfeldes. Analytische Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen sind in der Regel nicht möglich. Es gibt jedoch einige Sonderfälle, in denen die Navier-Stokes-Gleichungen aufgrund der Randbedingungen eine lineare Form annehmen oder sich zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung vereinfachen. Dann existieren in einigen Fällen analytische Lösungen.

Schichtenströmungen In Schichtenströmungen ist nur eine Geschwindigkeitskomponente von Null verschieden. Ein Beispiel haben wir bereits mit der laminaren Rohrströmung kennengelernt. Ein anderes Beispiel ist die azimutale Strömung im Spalt zwischen zwei konzentrisch angeordneten Zylindern, die sich mit unterschiedlichen Winkelgeschwindigkeiten drehen. Im Folgenden betrachten wir der Einfachheit halber ebene Strömungen, bei denen in kartesischen Koordinaten nur die Geschwindigkeitskomponente u in x -Richtung nicht verschwindet. Dann ist

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.134)$$

Da die Navier-Stokes-Gleichungen betrachtet werden, ist die Dichte konstant. Aus der Kontinuitätsgleichung folgt:

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial z}}_{=0} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.135)$$

$$\Rightarrow \boxed{u = u(y, z, t), \quad v \equiv 0, \quad w \equiv 0.} \quad (4.136)$$

Die Geschwindigkeit hängt also nicht von der Ortskomponente in Strömungsrichtung ab. Verwendet man dies in den Navier-Stokes-Gleichungen, so folgt:

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x}}_{=0} + \underbrace{v \frac{\partial u}{\partial y}}_{=0} + \underbrace{w \frac{\partial u}{\partial z}}_{=0} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{=0} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (4.137)$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + 0, \quad (4.138)$$

$$\rho \frac{dw}{dt} = 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + 0. \quad (4.139)$$

Die konvektive Zeitableitung, und damit die Nichtlinearität, ist weggefallen. Weiterhin hängt der Druck nicht von der y - und z -Koordinate ab, $p = p(x, t)$. Es bleibt eine lineare partielle Differentialgleichung für die Geschwindigkeit u mit $u = u(y, z, t)$:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \quad (4.140)$$

i) stationäre, ebene Kanalströmung Ein Spezialfall der Schichtenströmung ist die stationäre, ebene Strömung in einem Kanal der Breite $2b$, siehe Abbildung 4.18. In dieser hängt die Geschwindigkeit allein von y ab. An den beiden

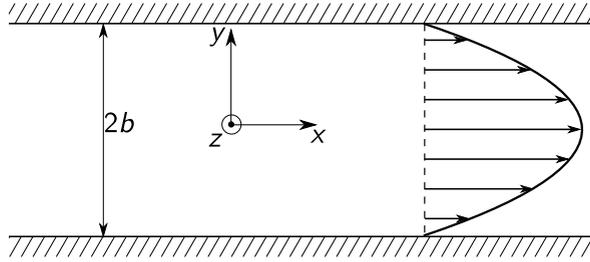


Abbildung 4.18: Kanalströmung.

Kanalwänden, bei $y = \pm b$, gilt die Haftbedingung, $u(\pm b) = 0$. Der Druck ist nur noch eine Funktion von x (keine Zeitabhängigkeit). Die Gleichung 4.140 für Schichtenströmungen vereinfacht sich zu

$$\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (4.141)$$

Da der Druck nicht von y abhängt und die Geschwindigkeit nicht von x , ist $dp/dx = \text{const.}$ Als Lösung dieser Differentialgleichung erhält man

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - b^2). \quad (4.142)$$

Wie schon bei der Rohrströmung ist das Geschwindigkeitsprofil parabolisch. Die Lösung für das Geschwindigkeitsprofil in der Rohrströmung lässt sich analog ableiten. Dabei verwendet man jedoch die Navier-Stokes-Gleichung in Zylinderkoordinaten.

ii) Couette-Strömung Wenn sich bei der ebenen Kanalströmung eine der Wände mit einer Geschwindigkeit U in x -Richtung bewegt, spricht man von einer Couette-Strömung. Für die Lösung der Navier-Stokes-Gleichung ist es zweckmäßig, den Ursprung des Koordinatensystems auf die ruhende Wand zu legen. Die bewegte Wand befindet sich dann im Abstand h bei $y = h$, siehe Abbildung 4.19. Es gilt wieder Gleichung (4.141)

$$\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (4.141)$$

Der Druckgradient ist also wieder konstant. Die Randbedingungen lauten diesmal

$$u(0) = 0 \quad \text{und} \quad u(h) = U. \quad (4.143)$$

Integration liefert die allgemeine Lösung mit den Integrationskonstanten A und B :

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 + Ay + B. \quad (4.144)$$

Mit der Haftbedingung an der ruhenden Wand bei $y = 0$ folgt $B = 0$. Die andere Randbedingung, $u(h) = U$, liefert

$$A = \frac{1}{h} \left(U - \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} h^2 \right). \quad (4.145)$$

Damit erhält man für das Geschwindigkeitsprofil zwischen den Wänden:

$$u(y) = U \frac{y}{h} - \frac{h^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left(1 - \frac{y}{h} \right) \frac{y}{h}. \quad (4.146)$$

Bereits ohne Druckgradient, also für $dp/dx = 0$, ist die Geschwindigkeit von Null verschieden und steigt linear von Null an der ruhenden Wand auf die Geschwindigkeit der bewegten Wand an. Falls dp/dx größer oder kleiner als Null ist, verringert sich bzw. steigt die Geschwindigkeit. Je nach Betrag des Druckgradienten können Geschwindigkeiten größer als die der bewegten Wand auftreten, oder sich Rückströmgebiete ($u < 0$) bilden, siehe Abbildung 4.19.

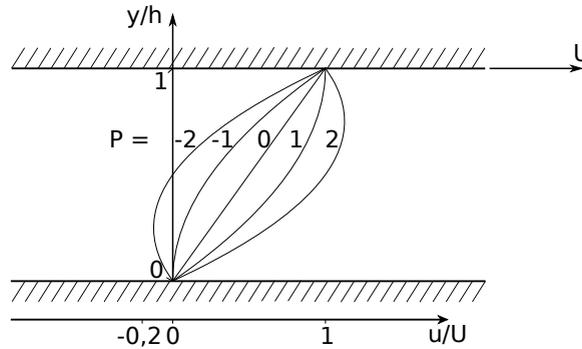


Abbildung 4.19: Couette-Strömung, Geschwindigkeitsprofile in Abhängigkeit vom Parameter P .

Auch die Couette-Strömung kann man dimensionsanalytisch betrachten. Vier Parameter bestimmen das Geschehen: U , h , μ und dp/dx . Da wieder drei Grundeinheiten vorkommen, bleibt eine Kennzahl. Hier bietet sich der dimensionslose Druckgradient P an,

$$P := -\frac{h^2}{2\mu U} \frac{dp}{dx}. \quad (4.147)$$

Nach dem Buckingham'schen Π -Theorem genügt diese Kennzahl, um zwischen den verschiedenen Geschwindigkeitsprofilen zu unterscheiden. Wir betrachten dazu die Schubspannung:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \mu \left(\frac{U}{h} - \frac{h^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left(\frac{1}{h} - 2 \frac{y}{h^2} \right) \right). \quad (4.148)$$

An den beiden Wänden, bei $y = 0$ und $y = h$, erhält man für die Wandschubspannung:

$$\mu \frac{du}{dy} \Big|_{y=0} = \mu \frac{U}{h} \left(1 - \frac{h^2}{2\mu U} \frac{dp}{dx} \right) = \mu \frac{U}{h} (1 + P), \quad (4.149)$$

$$\mu \frac{du}{dy} \Big|_{y=h} = \mu \frac{U}{h} \left(1 + \frac{h^2}{2\mu U} \frac{dp}{dx} \right) = \mu \frac{U}{h} (1 - P). \quad (4.150)$$

Für $P = 0$ ist die Wandschubspannung an beiden Wänden gleich. Dies entspricht dem linearen Geschwindigkeitsverlauf (vgl. auch Gleichung (4.146)). Für $P = \pm 1$ verschwindet die Wandschubspannung an der oberen bzw. unteren Wand, das Geschwindigkeitsprofil steht senkrecht auf der entsprechenden Wand. Das ist gerade der Fall beim Übergang zu lokalen Übergeschwindigkeiten ($u > U$) bzw. zu einer lokalen Rückströmung ($u < 0$), vgl. Abbildung 4.19.

iii) ruckartig beschleunigte Platte In einem ruhenden Fluid wird eine unendlich ausgedehnte ebene Platte zu einer Zeit $t = 0$ ruckartig auf eine konstante Geschwindigkeit U gebracht. Die Platte bewege sich dabei in ihrer eigenen Ebene ($y = 0$) in x -Richtung. Für die Geschwindigkeit im Fluid gilt:

- $t < 0$: $u = 0$,
- $t \geq 0$: $u(y = 0) = U$, $\lim_{y \rightarrow \infty} u(y) = 0$.

Der Druck in dem zunächst ruhenden Fluid bleibt überall konstant, daher ist $dp/dx = 0$. Von der Gleichung (4.140) für ebene Schichtenströmungen bleibt

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (4.151)$$

Dies ist eine Diffusionsgleichung. Sie ist von gleicher Form wie die Wärmeleitungsgleichung (die Geschwindigkeit entspricht der Temperatur und die kinematische Viskosität der Temperaturleitfähigkeit). Es treten keine charakteristischen Längen- und Zeitmaßstäbe auf. Die Lösung für die Geschwindigkeit in dimensionsloser Form, u/U , sollte daher nicht von willkürlichen Längen- und Zeitmaßstäben abhängen. Wir bilden daher unter Verwendung der kinematischen Viskosität ($[\nu] = \text{m}^2/\text{s}$) einen dimensionslosen Wandabstand η :

$$\eta = \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{\sqrt{\nu t}}. \quad (4.152)$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ ist ein reiner „Schönheitsfaktor“. Entsprechend unserer Erwartung setzen wir

$$\frac{u}{U} = f(\eta). \quad (4.153)$$

Aus Gleichung (4.151) erhalten wir wie folgt eine Gleichung für $f(\eta)$. Es ist

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{y}{4} \frac{\nu}{\sqrt{(\nu t)^3}}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{\nu t}}. \quad (4.154)$$

Damit lauten die Ableitungen der Geschwindigkeit nach Ort und Zeit

$$\frac{\partial u}{\partial t} = U \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = U f' \cdot \left(-\frac{y}{4} \frac{1}{\sqrt{\nu t^3}} \right), \quad (4.155)$$

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \nu U \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = \nu U f'' \cdot \frac{1}{4\nu t}. \quad (4.156)$$

Nach Einsetzen in Gleichung (4.151) erhalten wir eine gewöhnliche Differentialgleichung für die Funktion $f(\eta)$:

$$f'' + 2\eta f' = 0. \quad (4.157)$$

Dies ist ein Beispiel dafür, wie durch Einführen einer unabhängigen Ähnlichkeitsvariablen eine partielle Differentialgleichung in eine gewöhnliche übergeführt werden kann. Die Lösung der Gleichung (4.157) ist bekannt:

$$f(\eta) = \frac{u}{U} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-t^2} dt = 1 - \operatorname{erf}(\eta) =: \operatorname{erfc}(\eta). \quad (4.158)$$

Hier bezeichnet $\operatorname{erf}(\eta)$ die Fehlerfunktion (vgl. Abbildung 4.20) und $\operatorname{erfc}(\eta)$ die komplementäre Fehlerfunktion. Zur Erinnerung: $\operatorname{erf}(0) = 0$ und $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \operatorname{erf}(\eta) = 1$.

Die Ähnlichkeitslösung ist in Abbildung 4.21a dargestellt. Es handelt sich um eine **Anlaufströmung**. Die zeitliche Entwicklung erkennt man besser in der dimensionsbehafteten Darstellung, siehe Abbildung 4.21b. Die Strömung hat **Grenzschichtcharakter**: Nur in einem wandnahen Bereich ist die Geschwindigkeit merklich von

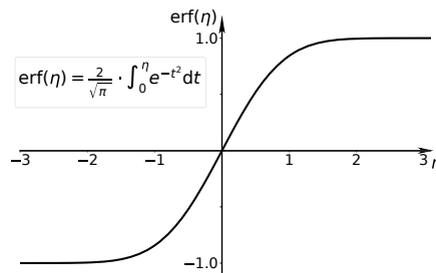
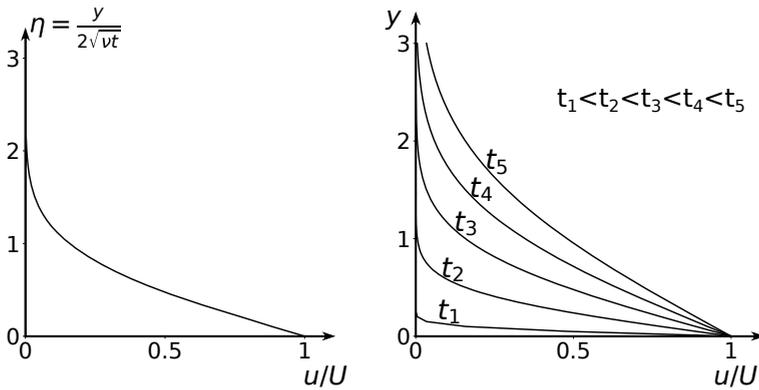


Abbildung 4.20: Fehlerfunktion in Abhängigkeit von η .

Null verschieden. Die Breite δ dieses Bereichs nimmt mit der Zeit zu. Wählt man als Maß für diese Breite den Abstand, an dem die Geschwindigkeit auf $\frac{1}{100}U$ abgefallen ist, so folgt $\eta \approx 2$ ($f(2) \approx 0,01$). Mit diesem Wert von η liefert Gleichung (4.152) die Aussage, dass die Breite δ proportional mit der Wurzel aus kinematischer Viskosität und der Zeit steigt:

$$\delta \propto \sqrt{\nu t}. \tag{4.159}$$



(a) Ähnlichkeitslösung.

(b) Zeitliche Entwicklung der Geschwindigkeit.

Abbildung 4.21: Geschwindigkeitsprofile neben einer ruckartig beschleunigten Platte.

Die durch die Plattenbewegung erzeugte ebene Strömung ist drehungsbehaftet. Vom Wirbeldichtevektor $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{u}$ ist allein die z -Komponente, ω_z , ungleich Null:

$$\omega_z = -\frac{\partial u}{\partial y} = -U \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{U}{\sqrt{\pi \nu t}} e^{-\eta^2}. \tag{4.160}$$

Die Wirbeldichte ω_z nimmt exponentiell mit dem dimensionslosen Wandabstand ab. Wir betrachten als nächstes die Wirbelstärke I pro Längeneinheit in x -Richtung neben der Platte:

$$I = \int_0^\infty \omega_z dy = \frac{U}{\sqrt{\pi \nu t}} \int_0^\infty e^{-\eta^2} 2\sqrt{\nu t} d\eta \tag{4.161}$$

$$= U \cdot \frac{2\sqrt{\nu t}}{\sqrt{\pi \nu t}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = U. \tag{4.162}$$

Die Wirbelstärke ist zeitlich konstant! Zu Beginn, bei $t = 0$, liegt direkt an der Platte eine unendlich dünne Wirbelschicht mit unendlich konzentrierter Wirbelstärke

vor. Mit der Zeit verteilt sich die Wirbelstärke durch Diffusion immer weiter im Fluid, ohne dass sich dabei der Gesamtbetrag ändert.

Die Wandschubspannung τ_w wirkt der Bewegung der Platte entgegen. Um die Bewegung der Platte mit konstanter Geschwindigkeit U aufrecht zu erhalten, muss ihr daher Leistung zugeführt werden. Pro Flächeneinheit ist diese gegeben durch:

$$-\tau_w U = -\mu \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{<0} \Big|_{y=0} U = \mu U^2 \frac{1}{\sqrt{\pi \nu t}} \propto \frac{1}{\sqrt{t}}. \quad (4.163)$$

Bis zu einer Zeit t_* ist dazu pro Flächeneinheit folgende Energie aufzubringen:

$$\int_0^{t_*} -\tau_w U \, dt \propto \sqrt{t_*}. \quad (4.164)$$

4.5 Schleichende Strömungen

Wenn in einer Strömung die Zähigkeitskräfte deutlich größer als die Trägheitskräfte sind, spricht man von **schleichenden Strömungen** (*creeping flows, Stokes flows*). Die Größe der Zähigkeits- und Trägheitskraft haben wir in Kapitel 4.3.1 bereits abgeschätzt und festgestellt, dass ihr Verhältnis gerade der Reynolds-Zahl entspricht (vgl. Gleichung (4.95)). In schleichenden Strömungen ist also die Reynolds-Zahl sehr klein.

In der Navier-Stokes-Gleichung kann man im Fall schleichender Strömungen den Trägheitsterm gegenüber dem Zähigkeitsterm vernachlässigen:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}}_{\text{Trägheit}} = - \underbrace{\frac{1}{\rho} \nabla p}_{\text{Druck}} + \underbrace{\frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{u}}_{\text{Zähigkeit}}. \quad (4.165)$$

Damit ist der aus mathematischer Sicht schwierige nichtlineare Term fortgefallen. Ähnlich wie im letzten Kapitel, wo wir analytische Lösungen der Navier-Stokes-Gleichung erhielten, wenn die speziellen Randbedingungen zu einem Verschwinden des nichtlinearen Trägheitsterms führten, sind auch im Fall schleichender Strömungen analytische Lösungen für nicht zu komplizierte Fälle möglich.

Betrachtet man die Navier-Stokes-Gleichung dimensionslos,

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \nabla) \vec{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \vec{u}, \quad (4.166)$$

könnte man im Grenzfall $Re \rightarrow 0$ in Versuchung kommen, nicht nur den Trägheitsterm, sondern auch weitere Terme wegzulassen. Dies ist jedoch nicht zulässig.

Weder über die Größe des Druckterms noch über die der lokalen Zeitableitung der Geschwindigkeit können wir eine entsprechende Aussage machen. Es bleibt die

Differentialgleichung schleichender Strömungen

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{u}. \quad (4.167)$$

Dies ist weiterhin eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Daher kann auch in schleichenden Strömungen die Haftbedingung erfüllt werden. Zusätzlich gilt die Kontinuitätsgleichung für inkompressible Fluide:

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0. \quad (4.168)$$

Beachte: Im umgekehrten Grenzfall, $Re \rightarrow \infty$, darf der Reibungsterm nicht einfach fortfallen. Dann würde sich die Ordnung der Differenzialgleichung reduzieren und die Haftbedingung wäre nicht mehr erfüllbar (vgl. Kapitel 4.2.1).

Der Druck ist in schleichenden Strömungen eine Potentialfunktion. Dies sieht man, wenn man auf die Differentialgleichung schleichender Strömungen die Divergenz anwendet und die Kontinuitätsgleichung beachtet:

$$\nabla(\nabla p) = \Delta p = \mu \nabla(\Delta \vec{u}) - \rho \nabla \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \mu \Delta(\nabla \vec{u}) - \rho \frac{\partial \nabla \vec{u}}{\partial t} = 0 \quad (4.169)$$

$$\Rightarrow \Delta p = 0. \quad (4.170)$$

Darauf werden wir in Kapitel 4.5.3 über Hele-Shaw Strömungen zurückkommen. Umgekehrt kann der Druck aus der Differenzialgleichung schleichender Strömungen eliminiert werden. Hier betrachten wir stationäre ebene Strömungen. Dann kann die Stromfunktion ψ verwendet werden. Es war:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (4.171)$$

Wenn wir auf diese Weise die Geschwindigkeit in Gleichung (4.167) ersetzen, dann die Gleichung für die x -Richtung nach y ableiten und die für die y -Richtung nach x , und die Gleichungen anschließend voneinander abziehen, so erhalten wir:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) = \mu \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \right), \quad (4.172)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) = -\mu \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} \right), \quad (4.173)$$

$$\Rightarrow 0 = \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \right). \quad (4.174)$$

Die letzte Gleichung ist eine Bipotentialgleichung für die Stromfunktion. Auch die Stromfunktion für zweidimensionale schleichende Strömungen in anderen Koordinatensystemen erfüllt eine Bipotentialgleichung. Koordinatenfrei wird dies über den sogenannten Plattenoperator (doppelter Laplace Operator) ausgedrückt:

$$\Delta\Delta\psi = 0. \quad (4.175)$$

4.5.1 Kugelumströmung und Stokes'sches Widerstandsgesetz

In schleichenden Strömungen sind Trägheitskräfte vernachlässigbar klein. In stationärer Strömung bleiben nur Zähigkeits- und Druckkräfte. Die Zähigkeitskraft ist pro Volumeneinheit von der Größenordnung $\mu U/L^2$. Im Gleichgewicht gilt dies auch für die Druckkraft. Bei geometrisch ähnlichen Fällen liegt daher dynamische Ähnlichkeit vor und Kräfte skalieren mit dem Produkt aus $\mu U/L^2$ und dem Volumen ($\propto L^3$). Für den Widerstand W eines umströmten Körpers erhält man so $W \propto \mu U/L^2 \cdot L^3$. In schleichender Strömung ist der Widerstand also proportional zur Zähigkeit, der Geschwindigkeit und einem charakteristischen Längenmaß:

$$W \propto \mu u L. \quad (4.176)$$

Dieser Zusammenhang lässt sich für einige Fälle analytisch aus der Differentialgleichung schleichender Strömungen ableiten. Dabei erhält man auch den genauen Proportionalitätsfaktor. Hier betrachten wir den Fall einer Kugel in Parallelanströmung. Weit vor der Kugel vom Radius R betrage die Geschwindigkeit u_0 und der Druck p_0 . Wir verwenden Kugelkoordinaten mit Ursprung des Koordinatensystems im Mittelpunkt der Kugel, siehe Abbildung 4.22. Entlang einer Achse in Anströmrichtung durch den Kugelmittelpunkt ist die Strömung achsensymmetrisch. Es treten also nur zwei unabhängige Variablen, der Radius r und der Polarwinkel θ , auf. Daher lassen sich die radiale und polare Komponente der Geschwindigkeit, u_r und u_θ , über die Stromfunktion ψ ausdrücken. Für diese gilt in schleichenden Strömungen die Bipotentialgleichung (4.175). An der Kugeloberfläche ist die Haftbedingung zu erfüllen, und für $r \rightarrow \infty$ wird die ungestörte Anströmgeschwindigkeit erreicht:

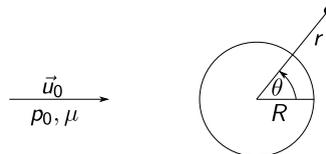


Abbildung 4.22: Kugelumströmung: Bezeichnungen.

$$u_r = 0, \quad u_\Theta = 0 \quad \text{für } r = R, \quad (4.177)$$

$$u_r = u_0 \cos(\Theta), \quad u_\Theta = -u_0 \sin(\Theta) \quad \text{für } r \rightarrow \infty. \quad (4.178)$$

Das Minuszeichen für $u_\Theta(r \rightarrow \infty)$ liegt daran, dass Θ gegen den Uhrzeigersinn mathematisch positiv gezählt wird. Für die Geschwindigkeitskomponenten und den Druck lautet die Stokes'sche Lösung der Bipotentialgleichung für die Kugelumströmung bei kleinen Reynolds-Zahlen:

$$u_r = +u_0 \cos(\Theta) \left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right), \quad (4.179)$$

$$u_\Theta = -u_0 \sin(\Theta) \left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right), \quad (4.180)$$

$$p - p_0 = -u_0 \cos(\Theta) \frac{3\mu R}{2r^2}. \quad (4.181)$$

Widerstand Widerstand (*drag*) ist die Kraft der Strömung in Anströmrichtung auf einen umströmten Körper. Um aus der Stokes'schen Lösung den Widerstand für die Kugel zu ermitteln, muss man die Druckverteilung und die Reibungsspannungen an der Kugeloberfläche untersuchen. Wir beginnen mit ausgewählten Punkten auf der Oberfläche. Den Druck bestimmen wir am vorderen und hinteren Staupunkt. Dort gilt:

$$\text{vorderer Staupunkt } (r = R, \Theta = \pi): \quad p - p_0 = +\frac{3}{2}\mu \frac{u_0}{R}, \quad (4.182)$$

$$\text{hinterer Staupunkt } (r = R, \Theta = 0): \quad p - p_0 = -\frac{3}{2}\mu \frac{u_0}{R}. \quad (4.183)$$

Die Drücke sind entgegengesetzt gleich, wobei der Druck am vorderen Staupunkt größer ist. Die Druckdifferenz liefert einen Beitrag zu einer Kraft auf die Kugel in Anströmrichtung, und damit zum Widerstand.

Reibung übt über die Wandschubspannung τ_w eine Kraft auf die Kugel aus. Die Wandschubspannung bestimmen wir exemplarisch am oberen Scheitelpunkt ($\Theta = \frac{\pi}{2}$, $r = R$):

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u_\Theta}{\partial r} \Big|_{r=R, \Theta=\frac{\pi}{2}} = -\mu u_0 \sin(\Theta) \frac{6}{4R} \Big|_{\Theta=\frac{\pi}{2}} = -\frac{3}{2}\mu \frac{u_0}{R}. \quad (4.184)$$

Das Minuszeichen bedeutet hier wieder eine Tangentialspannung in Anströmrichtung, die einen Beitrag der Reibung zum Widerstand liefert. Der Wert der Spannung entspricht dem Druckanstieg am vorderen Staupunkt.

Der Gesamtwiderstand der Kugel setzt sich aus Beiträgen des Drucks, dem Druckwiderstand W_p , und Beiträgen der Reibung, dem Reibungswiderstand W_τ , zusammen. W_p und W_τ erhält man durch Integration der jeweiligen Beiträge über die ganze

Kugeloberfläche A_K , wobei über den Einheitsvektor \vec{i} nur die Komponente in Anströmrichtung berücksichtigt wird (aus Gründen der Symmetrie gibt es hier auch keine andere Kraftkomponente):

$$W_p = \vec{i} \int_{A_K} p \, d\vec{A}, \quad (4.185)$$

$$W_\tau = \vec{i} \int_{A_K} \tau_W \, d\vec{A}. \quad (4.186)$$

Die Summe dieser beiden Widerstände ergibt für den gesamten Widerstand W :

$$W = W_p + W_\tau = 6\pi\mu u_0 R. \quad (4.187)$$

Dies ist das **Stokes'sche Widerstandsgesetz** für Kugeln. Experimentell wird es für $Re \lesssim 0,8$ gut erfüllt. Hierbei ist die Reynolds-Zahl mit dem Durchmesser der Kugel zu bilden, $Re = \rho u_0 2R/\mu$. Für die Widerstandsanteile gilt $W_p = \frac{1}{3}W$ und $W_\tau = \frac{2}{3}W$.

Skaliert man den Widerstand wie in Kapitel 4.3.3 (Gleichung (4.123)) mit dem Produkt aus Staudruck und angeströmter Stirnfläche der Kugel, so erhält man den Widerstandsbeiwert als Funktion der Reynolds-Zahl:

$$c_W = \frac{W}{\frac{\rho}{2} u_0^2 \pi R^2} = \frac{6\pi\mu u_0 R}{\frac{\rho}{2} u_0^2 \pi R^2} = 24 \cdot \frac{1}{Re}. \quad (4.188)$$

Geschwindigkeit Wir betrachten nun das Geschwindigkeitsprofil am Scheitel der Kugel (Polarwinkel $\Theta = \frac{\pi}{2}$). Dort ist die Geschwindigkeit parallel zur Anströmung, also nur die Komponente u_Θ von Null verschieden (vgl. Gleichung (4.179)/(4.180)):

$$u_r(r, \frac{\pi}{2}) = 0, \quad u_\Theta(r, \frac{\pi}{2}) = -u_0 \left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{1R^3}{4r^3} \right). \quad (4.189)$$

Die Abhängigkeit der Komponente u_Θ vom Abstand von der Kugeloberfläche ist in der folgenden Tabelle in dimensionsloser Form gelistet:

r/R	1	2	...	10	100
$-u_\Theta/u_0$	0	0.594	...	0.925	0.992

Selbst bei $r/R = 100$ erreicht die Geschwindigkeit nur ungefähr 99% der Anströmgeschwindigkeit. In schleichender Strömung hat die Kugel einen weitreichenden Einfluss. Umgekehrt können Oberflächen, die sich weit von der Kugel befinden, einen Einfluss auf deren Umströmung haben.

Trägheitsterm In schleichenden Strömungen wird der Trägheitsterm in der Navier-Stokes-Gleichung vernachlässigt. Auf dieser Grundlage wurde die Lösung für die Kugelumströmung abgeleitet. Mit der so erhaltenen Lösung für das Strömungsfeld lässt sich nun rückblickend die Größe des Trägheitsterms abschätzen:

$$\rho(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} \sim \rho u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} = \rho u_0^2 \cos^2(\Theta) \left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3}\right) \left(\frac{3R}{2r^2} - \frac{3R^3}{2r^4}\right) \sim \rho u_0^2 \frac{R}{r^2}. \quad (4.190)$$

Dies vergleichen wir mit der Größe des Druckterms:

$$\nabla p \sim \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{3\mu u_0 R}{2r^2} \cos(\Theta)\right) \sim \mu u_0 \frac{R}{r^3}. \quad (4.191)$$

Nach der Voraussetzung für schleichende Strömungen sollte der Trägheitsterm viel kleiner als die Druck- und Reibungsterme sein, also

$$\frac{\rho u_0^2 R}{r^2} \ll \mu u_0 \frac{R}{r^3} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\rho u_0 r}{\mu} \ll 1. \quad (4.192)$$

Im Gültigkeitsbereich der Stokes'schen Lösung für die Kugelumströmung ($Re \lesssim 0,8$) ist dies nur für $r \approx R$ der Fall. Nur in der Nähe der Kugel ist die charakteristische Länge für Geschwindigkeitsänderungen von der Größenordnung des Kugelradius. Weiter entfernt von der Kugel finden Änderungen der Geschwindigkeit über größere Längen statt. Verwendet man diese bei der Bildung der Reynolds-Zahl, so bleibt die Reynolds-Zahl, und damit das Verhältnis von Trägheits- zu Reibungskräften, nicht mehr klein.

Oseen'sche Näherung Ein Ausweg besteht darin, den Trägheitsterm in linearisierter Form zu berücksichtigen, indem man darin die lokale Geschwindigkeit einmal durch die konstante Anströmgeschwindigkeit ersetzt:

$$\underbrace{(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}}_{\text{nicht linear}} \quad \rightarrow \quad \underbrace{(\vec{u}_0 \cdot \nabla)\vec{u}}_{\text{linear}}. \quad (4.193)$$

Damit erhält man den Widerstandsbeiwert zu

$$c_W = \frac{24}{Re} \left(1 + \frac{3}{16} Re\right). \quad (4.194)$$

Diese Beziehung wird für Reynolds-Zahlen $Re \lesssim 5$ experimentell bestätigt.

4.5.2 Typische Eigenschaften schleichender Strömungen

Reversible Lösungen Schleichende Strömungen sind reversibel. Kehrt man überall das Vorzeichen der Geschwindigkeit und das des Druckgradienten um, so wird die Differentialgleichung schleichender Strömungen weiterhin erfüllt. Um das Vorzeichen des Druckgradienten zu ändern, würde es aus mathematischer Sicht genügen, einfach das Vorzeichen des Drucks zu ändern. Physikalisch erhält man dann negative Drücke. Dies kann man vermeiden, indem man den Druck für die umgekehrte Lösung von einer genügend großen positiven Konstante c abzieht:

$$\vec{u}(\vec{x}, t) \rightarrow -\vec{u}(\vec{x}, t), \quad (4.195)$$

$$p(\vec{x}, t) \rightarrow c - p(\vec{x}, t). \quad (4.196)$$

Aus dem Stromlinienbild einer schleichenden Strömung kann nicht auf die Strömungsrichtung geschlossen werden. Verläuft die Strömung um einen symmetrischen Körper wie in Abbildung 4.23, so verlaufen daher auch die Stromlinien um diesen Körper symmetrisch.

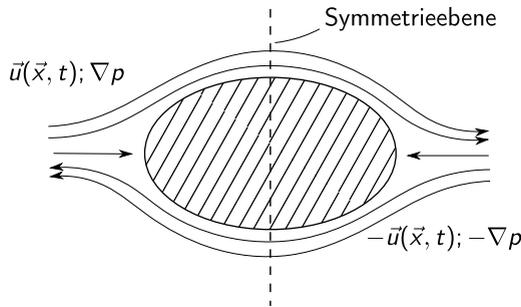


Abbildung 4.23: Reversible schleichende Strömung um einen symmetrischen Körper. Obere Hälfte: Strömung von links nach rechts, untere Hälfte: Strömung mit umgekehrten Vorzeichen.

Viskose Effekte In schleichenden Strömungen haben viskose Effekte eine große Reichweite. So ist der Einfluss einer Kugel in schleichender Strömung auch im Abstand von 100 Radien noch merklich (vgl. letztes Kapitel). Dies ist zum Beispiel bei der Untersuchung sedimentierender Partikel zu berücksichtigen. Ist der Abstand zwischen den Partikeln kleiner als ca. $100R$, so ist ihre Wechselwirkung nicht vernachlässigbar.

Widerstand Der Widerstand eines umströmten Körpers ist in schleichender Strömung direkt proportional zur Geschwindigkeit und einer den Körper repräsentierenden charakteristischen Länge.

4.5.3 Beispiele

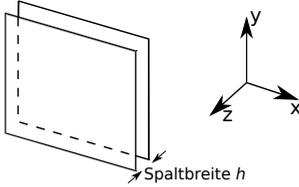


Abbildung 4.24: Anordnung für eine Hele-Shaw-Strömung zwischen zwei dicht benachbarten Platten.

Hele-Shaw-Strömung Als Hele-Shaw-Strömung (Hele-Shaw, 1854-1941) bezeichnet man die stationäre Strömung zwischen zwei dicht benachbarten Platten, siehe dazu Abbildung 4.24. Es liegt eine Schichtenströmung vor. Bei genügend kleinem Plattenabstand und kleiner Geschwindigkeit ist die Strömung schleichend. Im Spezialfall einer ebenen Strömung ohne Abhängigkeit von der y -Koordinate handelt es sich um eine Kanalströmung wie in Kapitel 4.4. Diese wird hier beschrieben durch

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (4.197)$$

mit konstantem Druckgradienten $\frac{\partial p}{\partial x}$. Für die Geschwindigkeitskomponente $u(z)$ in x -Richtung folgt daraus mit $u = 0$ an den Plattenoberflächen bei $z = 0$ und $z = h$:

$$u(z) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (z^2 - zh) \propto \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (4.198)$$

Im allgemeinen Fall nicht mehr ebener Strömungen gilt auch

$$v(z) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial y} (z^2 - zh) \propto \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (4.199)$$

In schleichender Strömung erfüllt der Druck außerdem die Potentialgleichung (4.170). Damit liegt eine Analogie zum Geschwindigkeitspotential ϕ in ebener wirbelfreier Strömung vor. Man sieht sofort, dass auch in der Hele-Shaw-Strömung die z -Komponente des Wirbelvektors verschwindet, $\omega_z = v_{/x} - u_{/y} = 0$. Den Gleichungen (4.198) und (4.199) zufolge ist weiterhin der Verlauf von Stromlinien unabhängig vom Wandabstand. Dies wird ausgenutzt, um Stromlinienverläufe in reibungslosen Potentialströmungen mittels Hele-Shaw-Strömungen sichtbar zu machen. Dazu bringt man zwischen die beiden Platten einen zylindrischen Körper beliebigen Querschnitts, für dessen Umströmung man sich interessiert. Dies kann z.B. ein Tragflügelprofil sein. Die Stromlinien erhält man durch Zufügen von Tintenfäden in die Hele-Shaw-Strömung.

Stromlinien in reibungsdominierter Hele-Shaw-Strömung entsprechen denen in reibungsfreier Strömung.

Darcy'sches Filtergesetz Strömungen durch poröse Medien können oft als schleichend angesehen werden. Voraussetzung ist, dass die Porosität, das Verhältnis von Hohlraum- zu Gesamtvolumen, klein ist. Dann ist gewöhnlich auch die mit dem Durchmesser der im porösen Medium vorhandenen Strömungskanäle gebildete Reynolds-Zahl klein und es liegt eine laminare schleichende Strömung vor. In den einzelnen Kanälen ist die Geschwindigkeit \vec{u}' dann proportional zum Druckabfall $\nabla p'$ und umgekehrt proportional zur Viskosität:

$$\vec{u}' \propto \frac{1}{\mu} \nabla p'. \quad (4.200)$$

Von Interesse ist aber nicht die Geschwindigkeit \vec{u}' , sondern die mittlere Geschwindigkeit \vec{u} des Fluids durch das poröse Medium. Diese Geschwindigkeit wird auch Filtergeschwindigkeit genannt und lässt sich z.B. über eine Volumenstrommessung bestimmen. In einem Rohr vom Querschnitt A wird dazu ein Abschnitt der Länge l mit dem porösen Medium gefüllt, siehe Abbildung 4.25. Direkt vor und hinter dem porösen Medium wird der Druck gemessen. Die Filtergeschwindigkeit (in der Rohrströmung ist dies die mittlere axiale Geschwindigkeit u) erhält man sofort aus dem Volumenstrom, $\dot{V} = u \cdot A$. Experimentell findet man

$$u = -k \frac{1}{\mu} \frac{p_1 - p_2}{l}. \quad (4.201)$$

Die Proportionalitätskonstante k wird Durchlässigkeit genannt und hat die Einheit

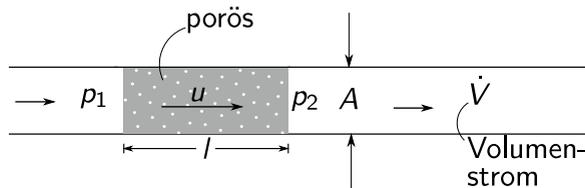


Abbildung 4.25: Strömung durch poröses Medium: Bezeichnungen.

einer Länge zum Quadrat. Ihr Wert hängt von der Art des porösen Mediums ab. Im allgemeinen Fall dreidimensionaler Strömungen ergibt dies das Darcy'sche Filtergesetz:

Darcy'sches Filtergesetz

$$\vec{u} = -\kappa \frac{1}{\mu} \nabla p. \quad (4.202)$$

Das Darcy'sche Filtergesetz wird für kleine Reynolds-Zahlen experimentell gut erfüllt. Für Kugelschüttungen ist dies zum Beispiel der Fall für

$$Re \leq 10, \quad \text{mit } Re = \frac{ud}{\nu} \quad \text{und } d: \text{ Durchmesser der Kugel.} \quad (4.203)$$

Zusammen mit der Potentialgleichung für den Druck, $\Delta p = 0$, sehen wir, dass auch Strömungen in porösen Medien Potentialströmungen sind. Auf diese Weise lassen sich zum Beispiel Grundwasserströmungen berechnen.

Lagerschmierung Ein Tropfen Öl kann „Wunder wirken“, also dazu führen, dass eine Maschine „wie geschmiert“ läuft. Dies liegt daran, dass sich ein dünner keilförmiger Ölfilm zwischen die sich gegeneinander bewegenden Teile legt und so deren gegenseitige Berührung verhindert. Ein typisches Beispiel ist ein Zapfen, der sich in einem Lager dreht (Abbildung 4.26a). Hier betrachten wir einen Gleitschuh (Abbildung 4.26b), an dem sich das Grundprinzip der Lagerschmierung wegen der einfacheren Geometrie leichter zeigen lässt. Im Bezugssystem des Gleitschuhs bewegt sich die Wand mit einer Geschwindigkeit u_w nach rechts, die Strömung ist stationär.

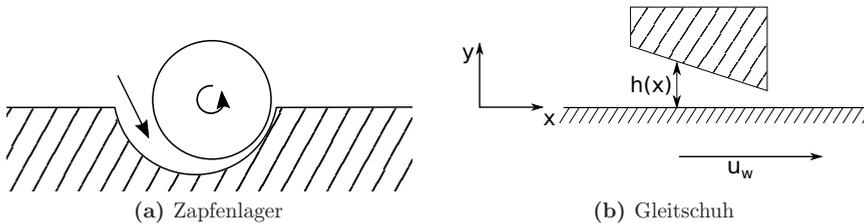


Abbildung 4.26: Lagerschmierung.

Wir treffen folgende Annahmen: Die Strömung im Spalt des Gleitschuhs ist eben, hängt also nur von x und y ab. Außerdem ändert sich die Spaltbreite h nur leicht ($dh/dx \ll 1$). Dann ist allein die u -Komponente der Geschwindigkeit wesentlich, die v -Komponente spielt nur für die Kontinuität eine Rolle ($v \ll u$). Ebenso vernachlässigen wir im schmalen Spalt Änderungen des Drucks in y -Richtung und betrachten den Druck als Funktion allein von x , $p = p(x)$.

Da $dh/dx \ll 1$, ändert sich u nur langsam in x -Richtung, Trägheitskräfte ($u \frac{\partial u}{\partial x}$) sind klein. In y -Richtung ändert sich u dagegen stark (Erfüllung der Haftbedingung sowohl an der bewegten Wand als auch am ruhenden Gleitschuh). Daher ist $\partial^2 u / \partial x^2 \ll \partial^2 u / \partial y^2$ und $\partial^2 u / \partial x^2$ kann vernachlässigt werden. Damit wird auch die Spaltströmung durch Gleichung (4.141) für Kanalströmungen beschrieben:

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (4.204)$$

Mit den Randbedingungen für die Geschwindigkeit,

$$u(y = 0) = u_w, \quad u(y = h(x)) = 0, \quad (4.205)$$

folgt für die Geschwindigkeit:

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} h^2 \left(\frac{y^2}{h^2} - \frac{y}{h} \right) + u_w \left(1 - \frac{y}{h} \right). \quad (4.206)$$

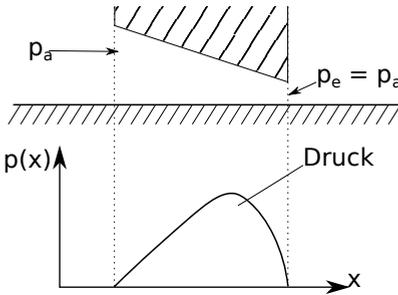


Abbildung 4.27: Druckverteilung im Spalt eines Gleitschuhs.

Dies ist äquivalent zur Lösung (4.146) für die Couette-Strömung, jedoch mit dem wesentlichen Unterschied, dass hier die Spaltbreite h eine Funktion von x ist.

Unser nächstes Ziel ist es, die Druckverteilung im Spalt zu bestimmen, denn es ist eine Erhöhung des Drucks im Spalt, die eine Berührung von Gleitschuh und Wand verhindert. Wir betrachten dazu den Volumenstrom \dot{V} (pro Länge quer zur Strömung) durch den Spalt:

$$\dot{V} = \int_0^{h(x)} u(x, y) dy = \text{const} = -\frac{1}{12\mu} \frac{dp}{dx} h^3 + \frac{u_w h}{2}. \quad (4.207)$$

Der Volumenstrom ist konstant, unabhängig von x . Falls auch $h(x) = \text{const}$, folgt mit der Randbedingung für den Druck am Spaltanfang und -ende, $p_a = p_e$, dass dann auch $p(x) = \text{const} = p_a$. Es tritt im Spalt keine Druckerhöhung auf. Voraussetzung für eine Druckerhöhung ist daher, dass $h(x) \neq \text{const}$.

Für eine bekannte Funktion $h(x)$, die hier linear in x sei, lässt sich Gleichung (4.207) für den noch unbekanntem Volumenstrom nach dp/dx auflösen und über die gesamte Spaltlänge integrieren. Am Spaltanfang und -ende ist der Druck durch den bekannten Umgebungsdruck vorgegeben. Damit erhält man aus der Lösung für den Druck den Volumenstrom \dot{V} . Mit dem nun bekannten Volumenstrom und der ebenfalls bekannten Funktion $h(x)$ für die Spaltbreite lässt sich dann der Druck an jedem Ort x_* im Spalt bestimmen:

$$p(x_*) = \int_0^{x_*} \frac{dp}{dx} dx = \int_0^{x_*} \left(6 \frac{\mu}{h^2} \cdot u_w - 12 \frac{\mu}{h^3} \cdot \dot{V} \right) dx. \quad (4.208)$$

Ein typischer Druckverlauf, wie er im Spalt unter einem Gleitschuh mit linearer Abnahme der Spaltbreite auftritt, ist in Abbildung 4.27 skizziert. Es lassen sich auf diese Weise im Spalt sehr große Druckerhöhungen erzeugen, der Ölfilm „trägt“ den Gleitschuh.

Kapitel 5

Integraler Impuls- und Drallsatz

In integraler Form erlauben der Impuls- und der Drallsatz, allein über eine Kenntnis des Zustandes an der Oberfläche eines Kontrollvolumens globale Aussagen über Strömungsvorgänge zu treffen. Detaillierte Kenntnisse des Strömungsfeldes im Inneren des Kontrollvolumens werden dabei nicht benötigt.

5.1 Formulierung der Gleichungen

5.1.1 Impulssatz

Der Impuls $\vec{I} = m\vec{u}$ eines einzelnen Massenpunktes der Masse m ändert sich, wenn am Massenpunkt eine externe Kraft \vec{F} (hier wieder als Kraft pro Masse) angreift:

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{u}) = m\vec{F}. \quad (5.1)$$

Im Fall eines Kontinuums betrachten wir den Impuls \vec{I} innerhalb eines räumlich ausgedehnten Kontrollvolumens V :

$$\vec{I} = \int_V (\rho\vec{u}) dV. \quad (5.2)$$

Die zeitliche Änderung dieses Impulses geschieht durch Volumen- und Oberflächenkräfte. Mit dem Reynolds'schen Transporttheorem (3.14) lautet die Zeitableitung des Impulses:

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho\vec{u} dV = \int_V \frac{\partial(\rho\vec{u})}{\partial t} dV + \int_A (\rho\vec{u})\vec{u} d\vec{A}. \quad (5.3)$$

Die Zeitableitung des Impulses ist gleich den am Volumen V angreifenden Kräften:

Integraler Impulssatz

$$\underbrace{\int_V \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} dV}_1 + \underbrace{\int_A (\rho \vec{u}) \vec{u} d\vec{A}}_2 = \underbrace{\int_V \rho \vec{F} dV}_3 + \underbrace{\int_A \sigma d\vec{A}}_4. \quad (5.4)$$

Die einzelnen Terme lassen sich wie folgt interpretieren:

- (1) Änderungsrate des Impulses innerhalb des raumfesten Kontrollvolumens V ,
- (2) Impulsfluss pro Zeit aus der raumfesten Kontrollfläche A (beachte: $d\vec{A} = \vec{n} dA$, die Flächennormale \vec{n} zeigt dabei aus dem Volumen nach außen),
- (3) alle Volumenkräfte, z.B. die Schwerkraft $\int_V \rho \vec{g} dV$,
- (4) alle Oberflächenkräfte, gegeben über den Spannungstensor σ mit $\sigma_{ij} = -\delta_{ij}p + \tau_{ij}$.

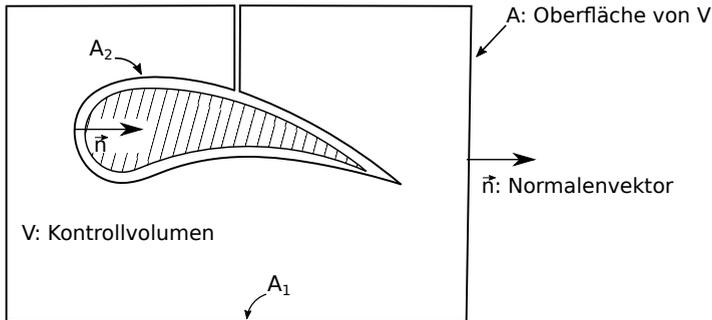


Abbildung 5.1: Kontrollvolumen um einen umströmten Körper.

Ein Ziel unter anderen bei der Verwendung des integralen Impulssatzes ist die Berechnung von Kräften, die auf einen umströmten Körper wirken. Das Kontrollvolumen wird dazu wie in Abbildung 5.1 um den Körper gelegt, ohne dass dieser selbst Teil des Kontrollvolumens ist. In den Oberflächenintegralen des Impulssatzes 5.4 heben sich die Beiträge der beiden Verbindungsflächen zwischen der weit außen liegenden Fläche und der Körperumrandung gegenseitig auf, da ihre Flächennormale einander entgegengesetzt sind. Die Oberfläche A des Kontrollvolumens wird im Folgenden zerlegt in einen Teil A_2 , der den Körper umschließt und den Rest (A_1):

$$A = A_1 \cup A_2. \quad (5.5)$$

In reibungsfreier Strömung sind die Oberflächenkräfte allein durch den Druck p bestimmt. Sie sind dann gegeben durch:

$$\int_A \sigma d\vec{A} = - \int_A p d\vec{A} = - \int_{A_1} p d\vec{A} - \int_{A_2} p d\vec{A} \quad (5.6)$$

$$= - \int_{A_1} p d\vec{A} - \vec{H}_S, \quad (5.7)$$

wobei

$$\vec{H}_S := \int_{A_2} p d\vec{A} : \text{Kraft der Strömung auf den umströmten Körper,} \quad (5.8)$$

$$\vec{H}_F := -\vec{H}_S : \text{„Haltekraft“, Kraft des Körpers auf die Strömung} \quad (5.9)$$

(eine „Fremdkraft“).

Für die Haltekraft erhält man aus dem Impulssatz (5.4) in reibungsfreier Strömung:

$$\vec{H}_F = \int_V \frac{\partial(\rho\vec{u})}{\partial t} dV + \int_{A=A_1 \cup A_2} (\rho\vec{u})\vec{u} d\vec{A} + \int_{A_1} p d\vec{A} - \int_V \rho\vec{F} dV. \quad (5.10)$$

5.1.2 Drallsatz

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses \vec{L} eines Massenpunktes bei \vec{r} wird durch ein äußeres Drehmoment \vec{M} bewirkt:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{u}) = \vec{r} \times m\vec{F} = \vec{M}. \quad (5.11)$$

Wir betrachten nun wieder ein Kontrollvolumen und den gesamten darin enthaltenen Drehimpuls. Analog zur Vorgehensweise beim Impulssatz ergibt sich im reibungsfreien Fall der Drallsatz (Impulsmomentengleichung) für einen umströmten Körper in folgender Form:

Integraler Drallsatz

$$\begin{aligned} & \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho(\vec{r} \times \vec{u})) dV + \int_{A=A_1 \cup A_2} \rho(\vec{r} \times \vec{u})\vec{u} d\vec{A} \\ &= \int_V \rho(\vec{r} \times \vec{F}) dV - \int_{A_1} p(\vec{r} \times d\vec{A}) + \vec{M}_F \end{aligned} \quad (5.12)$$

mit dem Haltemoment \vec{M}_F (Moment des Körpers auf die Strömung),

$$\vec{M}_F := - \int_{A_2} p(\vec{r} \times d\vec{A}) \quad (\sim \vec{r} \times \vec{H}_F). \quad (5.13)$$

5.2 Haltekraft für Körper in Parallelanströmung

Für einen Körper in unbegrenzter, stationärer und reibungsfreier Parallelanströmung bestimmen wir die Haltekraft unter Verwendung der oben abgeleiteten Gleichung (5.10). Die Situation ist in Abbildung 5.2 dargestellt. Die Parallelanströmung erfolgt in x -Richtung und ist gegeben durch $\vec{u}_\infty = u_\infty \vec{i}$. Der Körper verursacht eine Störung \vec{u}' der Anströmung, die in der Umgebung des Körpers nicht klein sein muss. Dort herrscht die Geschwindigkeit $\vec{u} = u_\infty \vec{i} + \vec{u}'$. Weit vom Körper klingen Störungen gewöhnlich ab. Eine wichtige Ausnahme bilden Überschallströmungen. In diesen entsteht vor dem Körper ein Verdichtungsstoß. Dessen Effekt kann weit reichen. Verdichtungsstöße werden später in Kapitel 6.2 behandelt. Im Folgenden betrachten wir ausschließlich Fälle, in denen die Störung mit zunehmendem Abstand vom Körper abklingt, also klein gegen die Geschwindigkeit der Anströmung wird. In großem Abstand $|\vec{r}| = |\vec{x} - \vec{x}_K|$ vom Körper (Notation vgl. Abbildung 5.2) gilt dann:

$$|\vec{u}'(\vec{x})| \ll u_\infty \quad \text{weit vom Körper.} \quad (5.14)$$

Die Bernoulli-Gleichung liefert eine Beziehung zwischen ungestörter Anströmung und gestörter Strömung:

$$p_\infty + \frac{\rho_\infty}{2} u_\infty^2 = p + \frac{\rho}{2} (u_\infty^2 + 2u_\infty u' + u'^2 + v'^2 + w'^2). \quad (5.15)$$

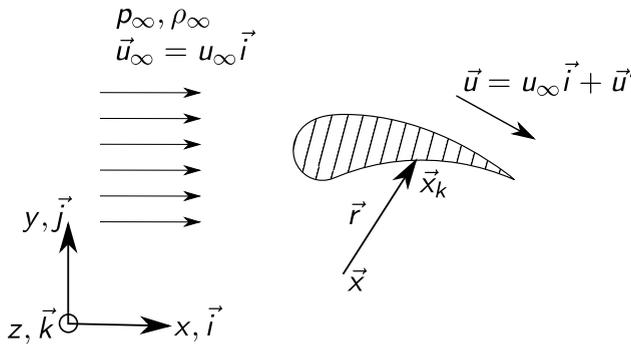


Abbildung 5.2: Umströmter Körper in Parallelanströmung.

Für eine Kontrollfläche weit vom umströmten Körper sind nach Voraussetzung (Gleichung (5.14)) die quadrierten Störgeschwindigkeiten vernachlässigbar klein. Außerdem kann dann dort die Dichte gleich der in der Anströmung gesetzt werden. Damit erhalten wir einen Zusammenhang zwischen Druck p und der x -Komponente u' der Störgeschwindigkeit an der Kontrollfläche:

$$p = p_\infty - \rho_\infty u_\infty u'. \quad (5.16)$$

Diesen Zusammenhang nutzen wir aus, um den Druck in der Gleichung für die Haltekraft zu ersetzen. Für die stationäre Strömung ohne äußere Kräfte ergibt Gleichung (5.10):

$$\vec{H}_F = \int_{A_1} p \, d\vec{A} + \int_{A=A_1 \cup A_2} (\rho \vec{u}) \vec{u} \, d\vec{A} \quad (5.17)$$

$$= \int_{A_1} (p_\infty - \rho_\infty u_\infty u') \, d\vec{A} + \int_A (\rho \vec{u}) \vec{u} \, d\vec{A}. \quad (5.18)$$

Das Integral über p_∞ über die geschlossene Kontrollfläche A_1 verschwindet. Damit folgt für die Haltekraft:

$$\vec{H}_F = - \int_{A_1} (\rho_\infty u_\infty u') \, d\vec{A} + \int_A (\rho \vec{u}) \vec{u} \, d\vec{A}. \quad (5.19)$$

d'Alembert'sches Paradoxon Die Haltekraft kann man in eine Komponente in Anströmrichtung und eine quer dazu zerlegen. Der negative Wert der Haltekraft in Anströmrichtung wird als **Widerstand** W bezeichnet. Der Widerstand entspricht damit der Kraft \vec{H}_S der Strömung auf den umströmten Körper in Anströmrichtung. Mit der Anströmung wie bisher in x -Richtung folgt für den Widerstand:

$$W = -\vec{H}_F \cdot \vec{i} = \vec{H}_S \cdot \vec{i} \quad (5.20)$$

mit \vec{i} als Einheitsvektor in x -Richtung. Mit Gleichung (5.19) und unter Beachtung von $\vec{i}\vec{u} = u_\infty + u'$ erhält man für den Widerstand:

$$W = + \int_{A_1} \rho_\infty u_\infty u' \vec{i} \, d\vec{A} - \int_{A_1} \rho (u_\infty + u') (u_\infty \vec{i} + \vec{u}') \, d\vec{A} - \int_{A_2} \rho (u_\infty + u') \vec{u} \, d\vec{A}. \quad (5.21)$$

An der weit vom umströmten Körper liegenden Kontrollfläche A_1 ist $\rho \approx \rho_\infty$. Damit und unter Vernachlässigung des quadratisch kleinen Terms:

$$\begin{aligned} W &= + \int_{A_1} \rho_\infty u_\infty u' \vec{i} \, d\vec{A} - \int_{A_1} \rho_\infty (u_\infty^2 \vec{i} + u_\infty u' \vec{i} + u_\infty \vec{u}' + u' \vec{u}') \, d\vec{A} \\ &\quad - \int_{A_2} \rho (u_\infty + u') \vec{u} \, d\vec{A} \\ &\approx - \underbrace{\int_{A_1} \rho_\infty u_\infty^2 \vec{i} \, d\vec{A}}_{=: I_1} - \underbrace{\int_{A_1} \rho_\infty u_\infty u' \vec{i} \, d\vec{A}}_{=: I_2} - \underbrace{\int_{A_2} \rho (u_\infty + u') \vec{u} \, d\vec{A}}_{=: I_3}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

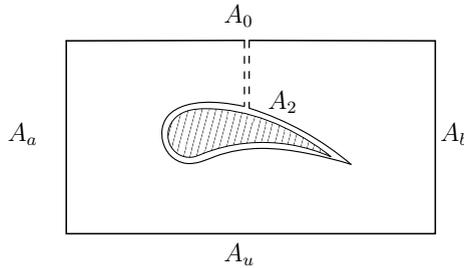


Abbildung 5.3: Kontrollfläche zu Gleichung (5.22).

Für eine Kontrollfläche $A_1 = A_o \cup A_a \cup A_u \cup A_b$ wie in Abbildung 5.3 liefern die einzelnen Integrale $I_1 - I_3$ die folgenden Beiträge:

- Integral I_1 : verschwindet, da \vec{i} senkrecht $d\vec{A}$ seitlich auf A_u und A_o , und da $A_a = A_b$.
- Integral I_2 : $\int_{A_1} \rho_\infty \vec{u}' d\vec{A}$ ist der Massenfluss aus dem Kontrollvolumen heraus. Für undurchlässige Körper verschwindet I_2 .
- Integral I_3 : für undurchlässige Körper ist \vec{u} senkrecht $d\vec{A}$ auf A_2 , I_3 verschwindet.

d'Alembert'sches Paradoxon

Ein undurchlässiger Körper erfährt in stationärer, reibungsfreier, unbegrenzter Parallelströmung keinen Widerstand, sofern die Störung der Strömung durch den Körper in großer Entfernung abklingt.

Diskussion: Für einen durchlässigen Körper muss das Integral I_2 nicht verschwinden. Zum Beispiel entsteht bei einer angeströmten Quelle, auch wenn Netto kein zusätzlicher Impuls in die Strömung eingebracht wird, ein negativer Widerstand. Dieser entspricht einem Vortrieb.

Querkräft Die Komponente der Haltekräft senkrecht zur Anströmrichtung wird **Querkräft** genannt. Wir gehen wieder von der Situation in Abbildung 5.2 aus und beschränken uns auf eine ebene Strömung. Mit dem Einheitsvektor \vec{j} in y -Richtung erhalten wir für die Querkräft:

$$\vec{j} \vec{H}_F = - \int_{A_1} \rho_\infty u_\infty u' \vec{j} d\vec{A} + \int_{A=A_1 \cup A_2} \rho v' \vec{u} d\vec{A}. \quad (5.23)$$

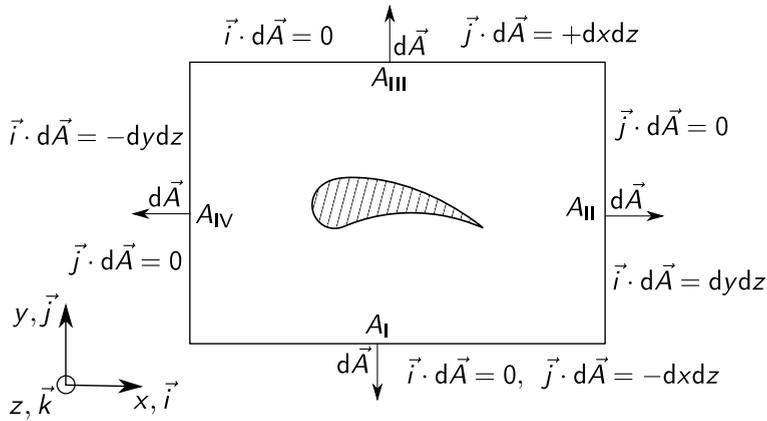


Abbildung 5.4: Beiträge einzelner Flächenelemente zum Integral in Gleichung (5.24).

Wie bei der Bestimmung des Widerstandes verschwindet für einen undurchlässigen Körper der Beitrag des zweiten Integrals über die den Körper umschließende Fläche A_2 , da dort \vec{u} senkrecht $d\vec{A}$. Unter Beachtung von $\rho \approx \rho_\infty$ bei A_1 und unter Vernachlässigung quadratisch kleiner Terme bleibt:

$$\vec{j} \vec{H}_F = \rho_\infty u_\infty \int_{A_1} (-u' \vec{j} + v' \vec{i}) d\vec{A}. \quad (5.24)$$

Als Teil A_1 des Kontrollvolumens, der weit vom Körper liegt, wählen wir wieder ein Rechteck mit Seiten parallel und senkrecht zur Anströmung, siehe Abbildung 5.4. Wie der Abbildung zu entnehmen ist, liefert jede Seite jeweils nur zu einem Teil des Integrals in Gleichung (5.24) einen Beitrag. Bezeichnet man die vier Seiten mit $A_I - A_{IV}$, so lässt sich das Integral folgendermaßen schreiben:

$$\vec{j} \vec{H}_F = \rho_\infty u_\infty \int_{A_1} [u'(A_I) dx + v'(A_{II}) dy - u'(A_{III}) dx - v'(A_{IV}) dy] dz \quad (5.25)$$

$$= \rho_\infty u_\infty \int \Gamma_z(z) dz. \quad (5.26)$$

$\Gamma_z(z)$ ist das Zirkulationsintegral längs einer Schnittlinie C mit der Kontrollfläche bei $z = \text{const}$:

$$\Gamma_z(z) = \oint_C \vec{u} d\vec{s} \quad (5.27)$$

$$= \oint_C [u'(C_I) dx + v'(C_{II}) dy - u'(C_{III}) dx - v'(C_{IV}) dy]. \quad (5.28)$$

In der letzten Gleichung wurde die Schnittlinie C entsprechend der Flächenteile ebenfalls in $C_I - C_{IV}$ unterteilt. Falls das Integral $\int \Gamma(z) dz \neq 0$, wirkt eine Querkraft in y -Richtung auf den Körper. In ebener Strömung, also bei Unabhängigkeit von z , wird die Querkraft a_y pro Längeneinheit in z -Richtung beschrieben durch den

Satz von Kutta und Joukowski

$$a_y = -\rho_\infty u_\infty \Gamma_z. \quad (5.29)$$

Die Kombination aus Anströmung und Zirkulation führt bei einem umströmten Tragflügel zum Auftrieb und ermöglicht das Fliegen, vgl. Abbildung 5.5. Das Zirkulationsintegral ist in mathematisch positiver Richtung zu nehmen. Bei positiver Zirkulation erhält man einen Abtrieb, bei negativer einen Auftrieb. Die Querkraft wird auch als **dynamischer Auftrieb** bezeichnet.

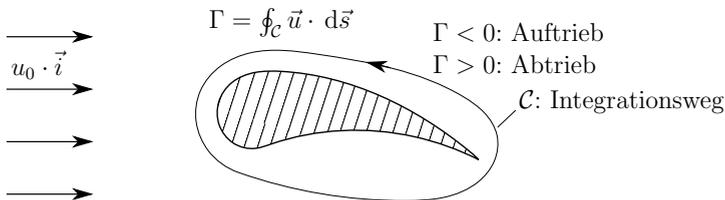


Abbildung 5.5: Zum Vorzeichen der Querkraft am umströmten Tragflügel.

Diskussion: Für den Auftrieb von Tragflügeln ist Zirkulation notwendig. Unter den hier gemachten Annahmen (Reibungsfreiheit, keine äußeren Kräfte) kann Zirkulation jedoch nicht entstehen (vgl. Kapitel 8). Die Umströmung eines Tragflügels sieht dann etwa aus wie in Abbildung 5.6a, mit einem hinteren Staupunkt auf der Flügeloberseite (dies lässt sich potentialtheoretisch berechnen aber auch sehr schön in einer Hele-Shaw-Strömung demonstrieren, vgl. Kapitel 4.5.3). Abbildung 5.6b zeigt einen Tragflügel allein mit (negativer) Zirkulation, aber ohne Anströmung. Kombiniert man diese beiden Fälle, so gibt es einen Wert der Zirkulation, bei dem

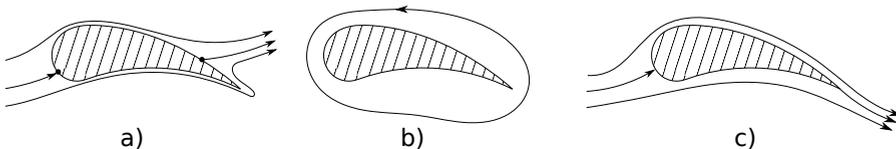


Abbildung 5.6: Umströmung eines Tragflügels, a) reibungsfrei, b) nur Zirkulation, c) Umströmung mit Zirkulation unter Erfüllung der Kutta-Joukowski'schen Abflussbedingung.

der hintere Staupunkt gerade auf der Hinterkante zu liegen kommt, die Strömung fließt glatt am Flügelende ab, vgl. Abbildung 5.6c. Dieser Zusammenhang zwischen Zirkulation und glattem Abfließen wird **Kutta-Joukowski'sche Abflussbedingung** genannt.

In reibungsbehafteten Fluiden entsteht um rotierende Körper aufgrund der Haftbedingung Zirkulation. Bei zusätzlicher Anströmung tritt auch hier eine Querkraft auf. Dies ist der **Magnus-Effekt**, der im Sport durch das „Anschneiden“ von Bällen ausgenutzt wird. Eine technische Anwendung fand der Magnus-Effekt in den 1920er Jahren als Antrieb für Schiffe. Trifft Seitenwind auf senkrecht montierte rotierende Zylinder (Flettner-Rotoren), so entsteht ein Vortrieb, vgl. Abbildung 5.7. Nachdem das Konzept zunächst nicht weiter verfolgt wurde, erfährt es in jüngerer Zeit wieder Beachtung. Der Flettner-Rotor soll als ergänzender Antrieb Treibstoff sparen, vgl. Abbildung 5.8.

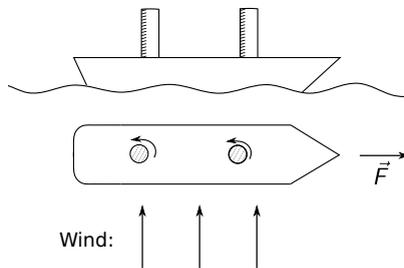


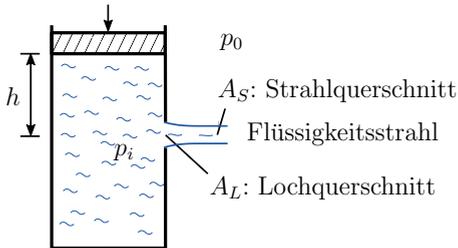
Abbildung 5.7: Entstehen von Vortrieb beim Flettner-Rotorschiff.



Abbildung 5.8: Flettner-Rotorschiff *E-Ship 1* (Lpele, CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons).

5.3 Beispiele

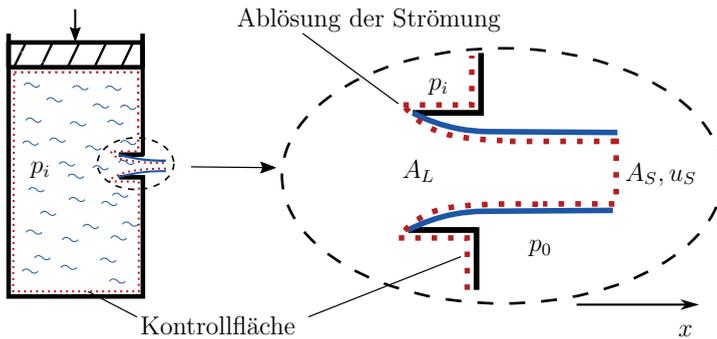
i) Kontraktionskoeffizienten



Flüssigkeit ($\rho = \text{const}$) strömt aus einem Gefäß durch eine Öffnung nach außen. Im Gefäß sei der Druck p_i so groß, dass der hydrostatische Druck ρgh vernachlässigbar ist. Außen herrsche der Druck p_0 . Das Verhältnis von Loch- zu resultierendem Strahlquerschnitt ist der **Kontraktionskoeffizient** α :

$$\alpha := \frac{A_S}{A_L}.$$

Für eine **Borda-Mündung** lässt sich der Kontraktionskoeffizient über den Impulssatz berechnen:



Impulssatz, stationär, ohne äußere Kräfte:

$$\int_A \rho \vec{u} \vec{u} \cdot d\vec{A} = - \int_A p \, d\vec{A},$$

an festen Wänden und auf dem Strahlrand:

$$\vec{u} \cdot d\vec{A} = 0,$$

Impulssatz, x -Komponente:

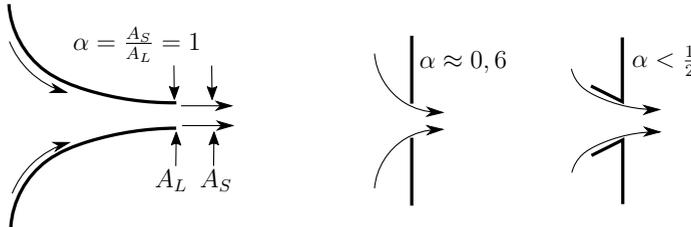
$$\rho u_S u_S A_S = -(p_0 - p_i) A_L,$$

u_S : Geschwindigkeit im Strahl.

Mit der Bernoulli-Gleichung $p_i = p_0 + \frac{\rho}{2} u_S^2$ folgt für den Kontraktionskoeffizienten:

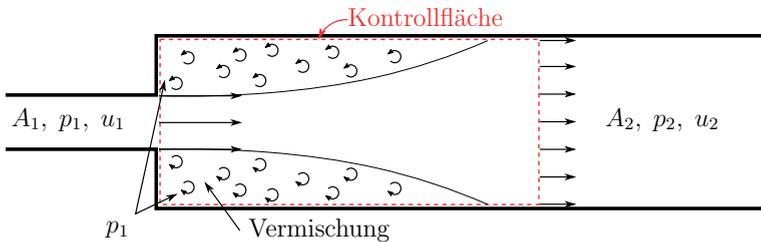
$$\alpha = \frac{A_S}{A_L} = \frac{1}{2}.$$

Kontraktionskoeffizienten anderer Mündungen:



ii) Carnot'scher Stoßverlust

Wir betrachten die stationäre Strömung durch ein Rohr mit plötzlicher Querschnittserweiterung:

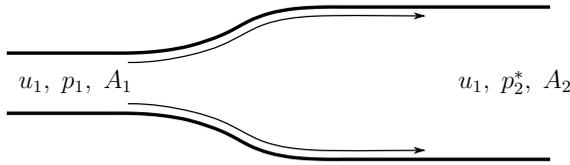


Beim Austritt aus dem Rohr kleinen Querschnitts strömt die Flüssigkeit ($\rho = \text{const}$) zunächst geradeaus als Freistrahл weiter. Neben dem Strahl ruht das Fluid. Dort herrscht der gleiche Druck (p_1) wie im Strahl. Reibungsspannungen führen dazu, dass sich der Strahl weiter stromab mit seiner Umgebung vermischt und er schließlich den gesamten Querschnitt A_2 des weiten Rohres ausfüllt. Gesucht ist der Druck p_2 im großen Rohr. Da bei den Mischprozessen Reibung eine Rolle spielt, ist die Bernoulli-Gleichung nicht anwendbar. Aber bei genügend großer Reynolds-Zahl kann der Impulssatz ohne Reibungsterm verwendet werden.

Vorgehensweise:

bekannt:	Geometrie (A_1, A_2), p_1, u_1 ,
gesucht:	Druck p_2 im Rohr mit größerem Querschnitt,
Kontinuitätsgleichung:	$u_1 A_1 = u_2 A_2 \Rightarrow u_2 = u_1 \frac{A_1}{A_2}$,
Impulssatz, x -Komponente:	$\rho u_2^2 A_2 - \rho u_1^2 A_1 = -(p_2 - p_1) A_2$,
	$\Rightarrow p_2 = p_1 + \rho u_2 (u_1 - u_2)$.

Vergleich mit Strömung durch ein Rohr mit stetiger Querschnittserweiterung:



Hier gibt es keine Verluste beim Mischen. Daher gilt die Bernoulli-Gleichung:

$$\Rightarrow p_2^* = p_1 + \frac{\rho}{2}(u_1^2 - u_2^2).$$

Die Differenz Δp_2 der Drücke ohne (p_2^*) und mit (p_2) Verlusten beim Mischen bezeichnet man als **Carnot'schen Stoßverlust**:

$$\Delta p_2 = p_2^* - p_2 = \frac{\rho}{2}(u_1 - u_2)^2.$$

Bei plötzlicher Querschnittserweiterung mit anschließenden reibungsbedingten Mischvorgängen ist der Druck im großen Rohr geringer als bei stetiger Querschnittserweiterung ohne Strahlbildung und anschließende Mischvorgänge. Entsprechende Druckverluste treten auch bei anders gestalteten Querschnittsveränderungen auf. Der Begriff „Stoßverlust“ erinnert an den ähnlich aussehenden Verlust an kinetischer Energie beim unelastischen Stoß zweier fester Körper.

iii) Widerstandsermittlung über Druckmessung im Nachlauf

In reibungsbehafteter Strömung wird an einem umströmten Körper die Haftbedingung erfüllt. Die Geschwindigkeit steigt in einer dünnen Schicht, der Grenzschicht, auf die Außengeschwindigkeit. Hinter dem Körper fließt die Grenzschicht von allen Seiten zusammen und bildet einen Nachlauf aus. Die damit verbundene Störung der Geschwindigkeit reicht weit hinter den Körper (vgl. Abbildung 5.9). Druckstörungen werden dagegen deutlich schneller ausgeglichen. Es ist möglich, den Widerstand des Körpers über eine Bestimmung des Impulsverlustes im Nachlauf zu ermitteln. Dies zeigen wir hier für eine inkompressible Strömung ($\rho = \text{const}$). Anmerkung: Die nicht abklingende Störung der Geschwindigkeit im Nachlauf ist die Ursache dafür, dass hier die Voraussetzungen für das d'Alembert'sche Paradoxon nicht erfüllt sind und ein Widerstand auftreten kann. Um den Impulssatz anzuwenden, wählen wir ein zylindrisches Kontrollvolumen, siehe Abbildung 5.9. Stromab des Körpers betrachten wir zwei unterschiedliche Lagen für das Ende des Kontrollvolumens:

- A_{N_1} bei x_1 : relativ nah am Körper, hier findet in der Praxis eine Messung statt,
- A_{N_2} bei x_2 : weit stromab des Körpers, eignet sich für theoretische Vorgehensweise.

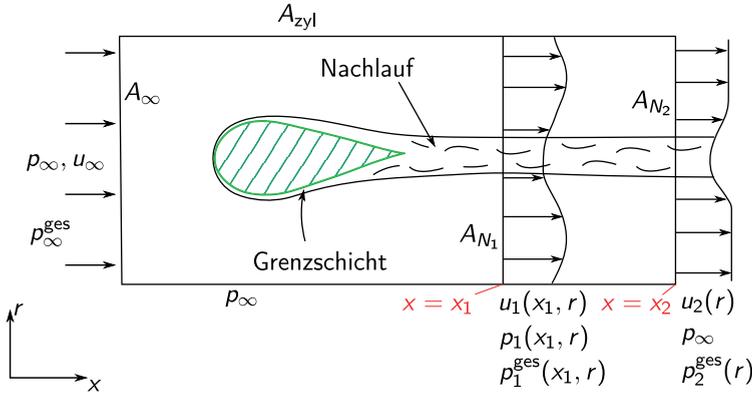


Abbildung 5.9: Nachlauf hinter einem Tragflügel.

Wir beginnen mit einem Kontrollvolumen, das bis A_{N_2} reicht. A_{N_2} liege soweit stromab, dass Druckstörungen ausgeglichen sind, also für den statischen Druck gilt $p_2 \approx p_\infty$. Der Widerstand ist gegeben durch:

$$W = -\vec{i}\vec{H}_F = -\rho \int_A (\vec{i}\vec{u})\vec{u} d\vec{A} - \underbrace{\vec{i} \int_{A_1} p d\vec{A}}_{=0}. \quad (5.30)$$

Mit $p = p_\infty = \text{const}$ an der äußeren Kontrollfläche A_1 , die die Körperoberfläche nicht enthält, folgt:

$$W = +\rho u_\infty^2 A_\infty - \rho u_\infty \int_{A_{Zyl.}} \vec{u} d\vec{A} - \rho \int_{A_{N_2}} u\vec{u} d\vec{A} - 0. \quad (5.31)$$

Das Integral über den Zylindermantel A_{Zyl} erhält man über die Kontinuitätsbedingung:

$$0 = \int_A \vec{u} d\vec{A} = -u_\infty A_\infty + \int_{A_{Zyl.}} \vec{u} d\vec{A} + \int_{A_{N_2}} \vec{u} d\vec{A} \quad (5.32)$$

$$\Rightarrow \int_{A_{Zyl.}} \vec{u} d\vec{A} = u_\infty A_\infty - \int_{A_{N_2}} \vec{u} d\vec{A}. \quad (5.33)$$

Damit folgt für den Widerstand:

$$W = \rho u_\infty^2 A_\infty - \rho u_\infty^2 A_\infty + \rho u_\infty \int_{A_{N_2}} \vec{u} d\vec{A} - \rho \int_{A_{N_2}} u\vec{u} d\vec{A}, \quad (5.34)$$

$$W = \rho \int_{A_{N_2}} (u_\infty - u)u dA. \quad (5.35)$$

Theoretisch liefert eine Messung der Geschwindigkeit $u_2(r)$ bei A_{N_2} den Widerstand. Praktisch liegt A_{N_2} für eine Messung meist zu weit hinter dem Körper. Im Folgenden wird deshalb ein anderer Weg vorgestellt.

Die Geschwindigkeit u_2 , die im letzten Integral auftritt, wird über eine Messung des statischen Drucks p_1 und des Gesamtdrucks $p_1^{\text{ges.}}$ an einer Fläche A_{N_1} bei x_1 , die näher hinter dem Körper liegt, bestimmt. Die Anströmgeschwindigkeit wird im Windkanal ebenfalls üblicherweise über den dort bekannten statischen und Gesamtdruck ausgedrückt. Man erhält:

- Fläche A_∞ (Anströmung): $p_\infty, p_\infty^{\text{ges.}}$ bekannt

$$\Rightarrow u_\infty = \frac{2}{\rho} \sqrt{p_\infty^{\text{ges.}} - p_\infty},$$
- Fläche A_{N_1} (bei $x = x_1$): $p_1, p_1^{\text{ges.}}$ werden gemessen

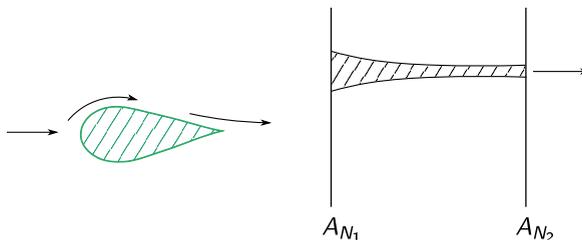
$$\Rightarrow u_1(x_1, r) = \frac{2}{\rho} \sqrt{p_1^{\text{ges.}}(x_1, r) - p_1(x_1, r)},$$
- Fläche A_{N_2} (bei $x = x_2$): $p_2 \approx p_\infty$ (schneller Druckausgleich, s.o.),

$$p_2^{\text{ges.}} \approx p_1^{\text{ges.}}$$
 (bei Vernachlässigung möglicher Verluste zwischen A_{N_1} und A_{N_2})

$$\Rightarrow u_2(r) = \frac{2}{\rho} \sqrt{p_1^{\text{ges.}}(x_1, r) - p_\infty}.$$

Wir betrachten nun eine Stromröhre zwischen A_{N_1} und A_{N_2} , siehe Abbildung. Mit konstanter Dichte in der Stromröhre gilt aus Gründen der Kontinuität:

$$u_1 \cdot dA_{N_1} = u_2 \cdot dA_{N_2}.$$



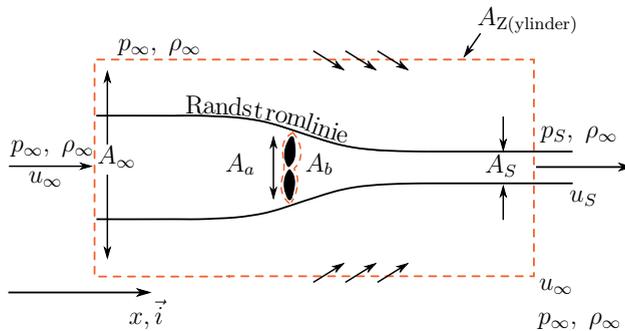
Damit kann das Integral in der Gleichung für den Widerstand über die Fläche A_{N_1} statt über A_{N_2} genommen werden:

$$W = \rho \int_{A_{N_2}} (u_\infty - u_2) u_2 dA_{N_2} = \rho \int_{A_{N_1}} (u_\infty - u_2) u_1 dA_{N_1}.$$

Die Geschwindigkeiten lassen sich alle über Drücke angeben. Den Widerstand erhält man so allein über eine Druckmessung in der Anströmung und an der Fläche A_{N_1} :

$$W = 2 \int_{A_{N_1}} \left(\underbrace{\sqrt{p_\infty^{\text{ges.}} - p_\infty}}_{\propto u_\infty} - \underbrace{\sqrt{p_1^{\text{ges.}}(x_1, r) - p_\infty}}_{\propto u_2} \right) \cdot \underbrace{\sqrt{p_1^{\text{ges.}}(x_1, r) - p_1(x_1, r)}}_{\propto u_1} dA_{N_1}.$$

iv) Propeller: Schub und Leistung



Schub und Leistung eines Propellers werden in vereinfachter Form über den Impulssatz bestimmt. Die Strömung sei reibungsfrei und stationär. Energiezufuhr geschieht über den Propeller. Dieser wird als sogenannte Wirkscheibe idealisiert. Drall, der am Propeller entsteht, wird vernachlässigt. Die Dichte wird im Kontrollvolumen als konstant angenommen. Beim Durchgang der Strömung durch die Wirkscheibe der Fläche $A_a = A_b$ erfährt das Fluid einen Druckanstieg. Dabei bleibt die Geschwindigkeit vor und hinter der Scheibe konstant (Kontinuität: $u_a A_a = u_b A_b$).

Der **Schub** S ist die x -Komponente der Haltekraft H_F :

$$S = \vec{i} \cdot \vec{H}_F = \vec{i} \int_A \rho \vec{u} \vec{u} d\vec{A} + \int_{A_1} \vec{i} p d\vec{A}.$$

Hierbei bezeichnet A die gesamte Kontrollfläche, A_1 ist die Fläche ohne den Teil um den Propeller. Damit:

$$\begin{aligned} S &= -\rho_\infty u_\infty^2 A_\infty + \rho_\infty u_\infty^2 (A_\infty - A_S) + \int_{A_Z + A_S} \rho(\vec{u}\vec{u})\vec{u} d\vec{A} \\ &= -\rho_\infty u_\infty^2 A_S + \rho_S u_S^2 A_S + \rho_\infty u_\infty \int_{A_Z} \vec{u} d\vec{A}. \end{aligned}$$

Das letzte Integral über A_Z können wir unter Ausnutzung der Kontinuität berechnen:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_A \rho \vec{u} d\vec{A} = -\rho_\infty u_\infty A_\infty + \rho_\infty u_\infty (A_\infty - A_S) + \rho_S u_S A_S + \rho_\infty \int_{A_Z} \vec{u} d\vec{A} \\ &\Rightarrow \rho_\infty \int_{A_Z} \vec{u} d\vec{A} = (\rho_\infty u_\infty - \rho_S u_S) \cdot A_S. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den Schub:

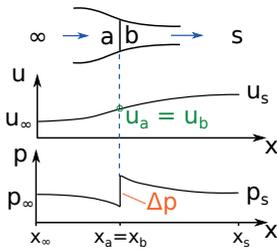
$$S = -\rho_\infty u_\infty^2 A_S + \rho_S u_S^2 A_S + \rho_\infty u_\infty^2 A_S - \rho_S u_S u_\infty A_S.$$

$$S = \rho_S u_S A_S (u_S - u_\infty) = \dot{m}_T (u_S - u_\infty).$$

Dabei ist \dot{m}_T der Massenstrom durch den Propeller:

$$\dot{m}_T = \rho_S u_S A_S = \rho_a u_a A_a.$$

Der Schub lässt sich auch über den Drucksprung an der Wirkscheibe bestimmen. Die Bernoulli-Gleichung liefert:



$$x_\infty \rightarrow x_a: \quad \rho \frac{u_\infty^2}{2} + p_\infty = \rho \frac{u_a^2}{2} + p_a,$$

$$x_b \rightarrow x_s: \quad \rho \frac{u_s^2}{2} + p_\infty = \rho \frac{u_b^2}{2} + p_b,$$

$$\Rightarrow p_b - p_a = \frac{\rho}{2} (u_s^2 - u_\infty^2).$$

Die Druckdifferenz $\Delta p = p_b - p_a$ verursacht einen Schub:

$$S = (p_b - p_a) A_a = \frac{\rho}{2} A_a (u_s^2 - u_\infty^2).$$

Vergleich mit $S = \dot{m}_T (u_s - u_\infty)$ liefert:

$$\rho u_a A_a (u_s - u_\infty) = \frac{\rho}{2} A_a (u_s^2 - u_\infty^2).$$

Damit erhält man für die Geschwindigkeit an der Wirkscheibe:

$$u_a = \frac{1}{2}(u_S + u_\infty).$$

Die Nutzleistung L_N beträgt:

$$L_N = u_\infty S.$$

Die über den Propeller hineingesteckte Leistung L_T ist hingegen:

$$L_T = u_a A_a \cdot \Delta E_{\text{kin}} = u_a A_a \frac{\rho}{2} (u_S^2 - u_\infty^2) = u_a A_a \Delta p = u_a S.$$

Das Verhältnis von L_N und L_T ist der Wirkungsgrad η :

$$\eta = \frac{L_N}{L_T} = \frac{u_\infty S}{u_a S} = \frac{u_\infty}{u_a} = \frac{2u_\infty}{u_\infty + u_S} = \frac{2}{1 + \frac{u_S}{u_\infty}} < 1.$$

Für $u_S \rightarrow u_\infty$ geht $\eta \rightarrow 1$, aber auch $S \rightarrow 0$. Praktisch findet man:

$$\eta_{\text{pr.}} = \eta \mu, \quad \mu \approx 0,85 - 0,90.$$

Hierbei bezeichnet μ den Gütegrad.

v) Windrad

Ein Windrad ist praktisch ein umgekehrt arbeitender Propeller. Hier treibt der Wind den Propeller an, den wir wieder als Wirkscheibe idealisieren. Die Überlegungen aus dem letzten Abschnitt können übernommen werden. Es gilt dann:

$$u_S < u_\infty \quad \text{und damit} \quad A_S > A_\infty.$$

Die Leistungsaufnahme des Windrades ist:

$$L_W = -u_a S = -\frac{u_S + u_\infty}{2} \frac{\rho}{2} (u_S^2 - u_\infty^2) A_a = \frac{1}{4} \rho A_a (u_S + u_\infty) (u_\infty^2 - u_S^2).$$

Die maximale Leistung $L_{W,\text{max}}$ des Windrades wird erreicht für u_S mit

$$\frac{dL_W}{du_S} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad u_S = \frac{1}{3} u_\infty.$$

Der maximale Wirkungsgrad, bezogen auf den Energiestrom durch das Rad, ist dann:

$$c_L = \frac{L_{W,\text{max}}}{(1/2) \rho A_a u_\infty^3} = \frac{16}{27} \approx 0,59.$$

Dieses Ergebnis wurde bereits 1919 von A. Betz abgeleitet. (*Albert Betz (1885 - 1968), Mitarbeiter an der Aerodynamischen Versuchsanstalt in Göttingen und Professor an der Universität Göttingen.*)

Kapitel 6

Energie

6.1 Energiesatz

Mit der Bernoulli-Gleichung haben wir in Kapitel 4.2.2 bereits einen Energiesatz der Strömungsmechanik kennengelernt. Die Bernoulli-Gleichung gilt allerdings nur für reibungsfreie barotrope Fluide. In reibungsbehafteten Strömungen führt Dissipation zur Umwandlung von mechanischer Energie in Wärme. In Energiebetrachtungen ist dann auch thermische Energie, hier in Form von innerer Energie, zu berücksichtigen. Weiterhin werden im Folgenden bei der Aufstellung des Energiesatzes keine Einschränkungen bezüglich der Zustandsgleichungen für das Fluid gemacht.

Die gesamte Energie E in einem Kontrollvolumen V setzt sich zusammen aus innerer Energie und kinetischer Energie. Mit der inneren Energie pro Masse, e , erhält man die Energie im Kontrollvolumen zu:

$$E = \int_V \rho \left(e + \frac{u^2}{2} \right) dV. \quad (6.1)$$

Die Zeitableitung der Energie kann mit dem Reynolds'schen Transporttheorem wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{dE}{dt} = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \left(e + \frac{u^2}{2} \right) \right) dV + \int_A \rho \left(e + \frac{u^2}{2} \right) \vec{u} d\vec{A} \quad (6.2)$$

$$= \int_V \left[\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(e + \frac{u^2}{2} \right) + \underbrace{\left(e + \frac{u^2}{2} \right) \frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\left(e + \frac{u^2}{2} \right) \operatorname{div}(\rho \vec{u})} + \rho \vec{u} \operatorname{grad} \left(e + \frac{u^2}{2} \right) \right] dV. \quad (6.3)$$

Das Oberflächenintegral wurde hier zunächst über den Gauß'schen Integralsatz in ein Volumenintegral umgewandelt. Der dabei entstehende Divergenzausdruck

sowie die Zeitableitung aus dem ersten Integral wurden außerdem mittels Produktregel umgeformt. Die unterstrichenen Terme verschwinden aufgrund der Kontinuitätsgleichung ($\partial\rho/\partial t + \operatorname{div}(\rho\vec{u}) = 0$). Damit ergibt sich:

$$\frac{dE}{dt} = \int_V \left[\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(e + \frac{u^2}{2} \right) + \rho \vec{u} \operatorname{grad} \left(e + \frac{u^2}{2} \right) \right] dV. \quad (6.4)$$

Mit der Definition der substantiellen Zeitableitung folgt:

$$\frac{dE}{dt} = \int_V \rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{u^2}{2} \right) dV. \quad (6.5)$$

Die zeitliche Änderung der Energie im Volumen geschieht zum einen durch Leistungen am Kontrollvolumen. Zu unterscheiden sind Leistungen von Volumenkräften und von Oberflächenkräften. Zum anderen kann Energie durch Wärmeleitung oder -strahlung über die Kontrollfläche transportiert werden:

- Leistung L_V von Volumenkräften, mit F_i als äußerer Kraft pro Masse:

$$L_V = \int_V \rho F_i u_i dV,$$

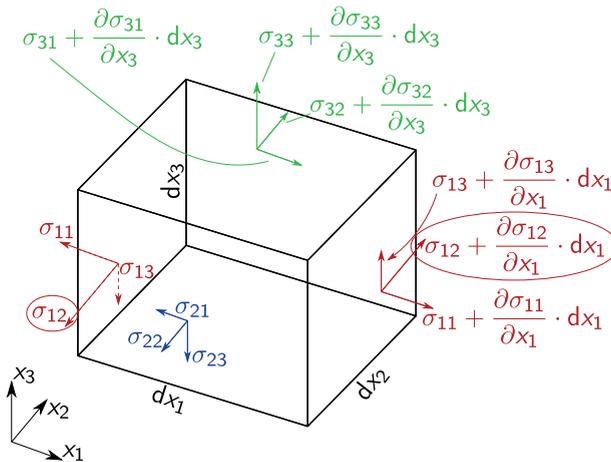


Abbildung 6.1: Zur Leistung von Oberflächenkräften.

- Leistung L_O von Oberflächenkräften, mit dem Spannungstensor:

$$\sigma_{ik} = -\delta_{ik} p + \tau_{ik}.$$

Als Beispiel betrachten wir den Beitrag der Spannungskomponente σ_{12} und

der Geschwindigkeitskomponente u_2 (vgl. Abbildung 6.1):

$$\left[-\sigma_{12}u_2 + \left(\sigma_{12} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} dx_1 \right) \left(u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 \right) \right] dx_2 dx_3 \quad (6.6)$$

$$= \left[u_2 \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} + \sigma_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 \right] dx_1 dx_2 dx_3$$

$$\approx \frac{\partial(u_2\sigma_{12})}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3. \quad (6.7)$$

Es gibt je drei Kraftkomponenten und Flächenorientierungen. Summiert über alle Beiträge folgt in Indexnotation:

$$L_O = \int_V (\sigma_{ik} \cdot u_k)_{/i} dV = \int_V \left[-(pu_i)_{/i} + (\tau_{ik}u_k)_{/i} \right] dV \quad (6.8)$$

oder, nach Umwandlung mit dem Gauß'schen Integralsatz,

$$L_O = \underbrace{\int_A -(pu_i) dA_i}_{L_P} + \underbrace{\int_A (\tau_{ik}u_k) dA_i}_{L_R}. \quad (6.9)$$

Das erste Integral bezeichnet die Leistung L_P des Drucks, das zweite die Leistung L_R der Reibungsspannungen.

- Aus dem Kontrollvolumen ausströmende Energie pro Zeit, L_q , durch Wärmeleitung oder Wärmestrahlung, mit der Wärmestromdichte q_i :

$$L_q = - \int_A q_i dA_i. \quad (6.10)$$

Im Folgenden betrachten wir nur Wärmeleitung. Dann ist $q_i = -\lambda \cdot T_{/i}$ mit der Temperatur T und der Wärmeleitfähigkeit λ . Die Integration der Wärmestromdichte ergibt:

$$L_q = \int_A \lambda T_{/i} dA_i = \int_V (\lambda T_{/i})_{/i} dV. \quad (6.11)$$

Mit diesen Beiträgen lautet der Energiesatz:

Energiesatz

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \left(e + \frac{u^2}{2} \right) \right) dV + \int_A \rho \left(e + \frac{u^2}{2} \right) \vec{u} d\vec{A} \\ &= \int_V \rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{u^2}{2} \right) dV = L_P + L_R + L_V + L_q. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Diese Gleichung kann weiter umgeformt werden. Dazu eliminieren wir die kinetische Energie über die Cauchy'sche Bewegungsgleichung (4.36),

$$\rho \frac{du_i}{dt} = -p_{/i} + \tau_{ki/k} + \rho F_i. \quad (6.13)$$

Multiplikation dieser Gleichung mit u_i und anschließende Integration über V ergibt:

$$\int_V \rho u_i \frac{du_i}{dt} dV = \int_V \rho \frac{1}{2} \frac{du^2}{dt} dV = \int_V - [u_i p_{/i} + u_i \tau_{ki/k} + \rho u_i F_i] dV. \quad (6.14)$$

Dabei ist $u^2 = u_i \cdot u_i$ der Geschwindigkeitsbetrag zum Quadrat. Subtraktion dieser Gleichung vom Energiesatz liefert

$$\int_V \rho \frac{de}{dt} dV = \int_V (-\rho u_{i/i}) dV + \int_V \tau_{ik} u_{k/i} dV + L_Q. \quad (6.15)$$

Da das Kontrollvolumen beliebig wählbar ist, gilt Gleichung (6.15) auch für die Integranden. Die Divergenz der Geschwindigkeit können wir hier noch mit der Kontinuitätsgleichung über die Dichte bzw. deren Kehrwert, das **spezifische Volumen** $v := 1/\rho$, ausdrücken:

$$u_{i/i} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \rho \frac{d^1 v}{dt} = \rho \frac{dv}{dt}. \quad (6.16)$$

Damit erhalten wir eine alternative Form der Energiegleichung:

$$\boxed{\underbrace{\frac{de}{dt}}_{(1)} = -\underbrace{p}_{(2)} \frac{dv}{dt} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \tau_{ik} u_{k/i}}_{(3)} + \underbrace{\frac{1}{\rho} (\lambda T_{/i})_{/i}}_{(4)}} \quad (6.17)$$

Die einzelnen Terme haben folgende Bedeutung:

- (1) Änderungsgeschwindigkeit der inneren Energie pro Masseneinheit,
- (2) Leistung des Drucks am spezifischen Volumen,
- (3) Dissipation pro Masseneinheit: pro Zeit- und Masseneinheit erzeugte Reibungswärme,
- (4) durch Wärmeleitung pro Zeit und Masseneinheit zugeführte thermische Energie.

Dissipation Um den Dissipationsterm besser zu verstehen, betrachten wir den ersten Hauptsatz der Thermodynamik:

$$de = dq - p d\left(\frac{1}{\rho}\right) = dq - p dv. \quad (6.18)$$

Die innere Energie ändert sich aufgrund von zugeführter Wärme dq und geleisteter mechanischer Arbeit $-p d(1/\rho)$ (jeweils pro Masse). Ersetzt man hiermit in der Energiegleichung (6.17) die zeitliche Änderung der inneren Energie, so folgt für die zeitliche Änderung der Wärme:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{\rho} \tau_{ik} u_{k/i} + \frac{1}{\rho} (\lambda T/i)_{/i}. \quad (6.19)$$

Der erste Term auf der rechten Seite repräsentiert die **Dissipation**. Die Dissipation Φ pro Volumen ist definiert als

$$\boxed{\Phi := \tau_{ik} u_{k/i}}. \quad (6.20)$$

Unter Ausnutzung der Symmetrie des Spannungstensors, hier der Reibungsspannungen τ_{ik} , kann man schreiben:

$$\Phi = \frac{1}{2} \tau_{ik} u_{k/i} + \frac{1}{2} \tau_{ki} u_{i/k} = \frac{1}{2} \tau_{ik} (u_{k/i} + u_{i/k}) = \tau_{ik} D_{ik}, \quad (6.21)$$

wobei D_{ik} den Deformationstensor aus Kapitel 3.5 bezeichnet. Ohne Deformation (Dehnung und/oder Scherung) gibt es keine Dissipation.

Für Newton'sche Fluide sind die Reibungsspannungen gegeben durch:

$$\tau_{ik} = \mu (u_{i/k} + u_{k/i}) + \lambda \delta_{ik} u_{i/i}. \quad (6.22)$$

Hier sind μ die Scherviskosität und $\lambda = \mu_B - 2/3\mu$ die Volumenviskosität. Mit dem Stokes'schen Ansatz, d.h. mit $\mu_B = 0$ für die Druckviskosität, ergibt sich die Dissipation in Newton'schen Fluiden nach Gleichung (6.22) zu:

$$\Phi = \frac{1}{2} \tau_{ik} (u_{k/i} + u_{i/k}) \quad (6.23)$$

$$= \frac{1}{2} \mu (u_{i/k} + u_{k/i})^2 - \frac{1}{2} \frac{2}{3} \mu \delta_{ik} \underbrace{u_{m/m} (u_{i/k} + u_{k/i})}_{=2(u_{m/m})^2} \quad (6.24)$$

$$= \underbrace{\frac{\mu}{2} (1 - \delta_{ik}) (u_{i/k} + u_{k/i})^2}_{=:A} + \underbrace{\frac{\mu}{2} \delta_{ik} (u_{i/k} + u_{k/i})^2 - \frac{2}{3} \mu \delta_{ik} (u_{m/m})^2}_{=:B}. \quad (6.25)$$

Es gilt:

$$A = \frac{\mu}{2} (1 - \delta_{ik}) (u_{i/k} + u_{k/i})^2 \geq 0 \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu}{2} \delta_{ik} (u_{i/k} + u_{k/i})^2 - \frac{2}{3} \mu \delta_{ik} (u_{m/m})^2 \\ &= \frac{\mu}{2} \delta_{ik} \frac{4}{3} (u_{m/m})^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Die Dissipation $\Phi = A + B$ ist damit immer größer oder gleich Null:

$$\Phi \geq 0. \quad (6.28)$$

Die Deformation von Fluidteilchen verursacht positive Dissipation.
Starrkörperbewegung ist dissipationsfrei.

6.2 Stromfadentheorie

6.2.1 Zustandsgrößen und Geschwindigkeit

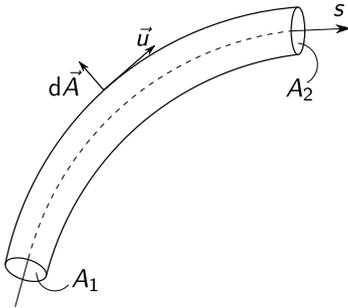


Abbildung 6.2: Stromfaden mit Kontrollvolumen.

Für eine stationäre Strömung entlang eines Stromfadens lassen sich aus der Energiegleichung Zusammenhänge zwischen den thermodynamischen Zustandsgrößen und der Geschwindigkeit ableiten. Wir betrachten dazu einen Stromfaden, dessen Querschnittsfläche A von der Bogenlänge s abhängt. Die Strömung sei stationär und reibungsfrei, ohne äußere Kräfte. Transportprozesse für Wärme, wie z.B. Wärmeleitung, seien ebenfalls nicht vorhanden. Gesucht wird der Verlauf der Zustandsgrößen und der Geschwindigkeit entlang des Stromfadens.

Ausgangspunkt für die nachfolgenden Überlegungen ist der Energiesatz, der unter diesen Voraussetzungen wie folgt lautet:

$$\int_A \rho \left(e + \frac{u^2}{2} \right) \vec{u} \, d\vec{A} = - \int_A p \vec{u} \, d\vec{A}. \quad (6.29)$$

Als Kontrollvolumen wählen wir einen Abschnitt des Stromfadens, vgl. Abbildung 6.2. Da auf der Mantelfläche der Normalenvektor der Fläche überall senkrecht zum Geschwindigkeitsvektor ist, tragen nur die beiden Querschnittsflächen A_1 und A_2 zu den Integralen bei:

$$\rho_2 \left(e_2 + \frac{u_2^2}{2} \right) u_2 A_2 - \rho_1 \left(e_1 + \frac{u_1^2}{2} \right) u_1 A_1 = - (p_2 u_2 A_2 - p_1 u_1 A_1). \quad (6.30)$$

In der stationären Strömung ist der Massenstrom an jeder Stelle des Stromfadens gleich, $\rho u A = \rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2$. Nach Teilen durch den Massenstrom und leichter Umstellung erhalten wir:

$$\rho_1 u_1 A_1 \left(e_2 - e_1 - \frac{u_1^2}{2} + \frac{u_2^2}{2} \right) = p_1 u_1 A_1 - p_2 u_1 A_1 \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (6.31)$$

$$\Rightarrow e_2 + \frac{u_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2} = e_1 + \frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1}. \quad (6.32)$$

Die in dieser Gleichung auftretende Summe aus innerer Energie e und dem Verhältnis von Druck und Dichte, p/ρ , ist gerade die Enthalpie h ,

$$h = e + \frac{p}{\rho}. \quad (6.33)$$

Die Enthalpie ändert sich nach Gleichung (6.32) mit der Strömungsgeschwindigkeit. Im Ruhezustand ($u = 0$) liegt die Ruheenthalpie $h_0 = e_0 + p_0/\rho_0$ vor. Der Zusammenhang aus Gleichung (6.32) gilt entlang des gesamten Stromfadens und damit entlang einer Stromlinie:

Energiesatz der Stromfadentheorie

$$e + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = h + \frac{u^2}{2} = h_0 = \text{const.} \quad (6.34)$$

Diese Gleichung ähnelt der Bernoulli-Gleichung für stationäre inkompressible Strömungen. Es gibt jedoch entscheidende Unterschiede:

- Dichte ist voll variabel,
- innere Energie wird berücksichtigt,
- Isentropie wird nicht vorausgesetzt, d.h., irreversible Prozesse wie Verdichtungsstöße (siehe nächstes Kapitel 6.2.2) sind zulässig.

Für das weitere Vorgehen werden **Zustandsgleichungen** benötigt. Dies sind die

$$\text{thermische Zustandsgleichung : } f_{\text{therm}}(\rho, p, T) = 0, \quad (6.35)$$

$$\text{kalorische Zustandsgleichung : } f_{\text{kal}}(\rho, e, T) = 0. \quad (6.36)$$

Als Beispiel werden in Tabelle 6.1 Zustandsgleichungen für ideale Gase und die nach Tait, die vor allem für Flüssigkeiten geringer Kompressibilität gilt, miteinander verglichen.

Im Folgenden beschränken wir uns auf **ideale Gase**. Die Enthalpie idealer Gase ist nach Tabelle 6.1 gegeben durch:

$$h = e + \frac{p}{\rho} = c_V T + \text{const} + RT = c_p T + \text{const.} \quad (6.37)$$

	ideales Gas	Tait-Gleichung
thermisch	$p = \rho RT$	$\frac{p+B}{p_0+B} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^A$
kalorisch	$e = c_v \cdot T + \text{const}$	$e = c \cdot T + \text{const}$
mit	$R = c_p - c_v$ R : spezifische Gaskonstante (für Luft: $R \approx 287\text{J}/(\text{kgK})$) c_p, c_v : spez. Wärme bei konstantem Druck/Volumen	A, B : Konstanten (für Wasser: $A \approx 7$, $B = \rho_0 c_0^2 / A \approx 0,3\text{GPa}$, mit c_0 : Ruheschallgeschwin- digkeit, s.u.)

Tabelle 6.1: Zustandsgleichungen.

Für adiabatische Zustandsänderungen vereinfachen sich die Beziehungen zwischen den verschiedenen Zustandsgrößen. Mit $dq = 0$ lautet der erste Hauptsatz der Thermodynamik:

$$de = dq - p d\left(\frac{1}{\rho}\right) = -p d\left(\frac{1}{\rho}\right). \quad (6.38)$$

Mit (vgl. kalorische und thermische Zustandsgleichung)

$$de = c_v dT \quad \text{und} \quad -p d\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\rho RT d\left(\frac{1}{\rho}\right) = RT \frac{d\rho}{\rho} \quad (6.39)$$

$$\Rightarrow c_v \frac{dT}{T} = R \frac{d\rho}{\rho}. \quad (6.40)$$

Unter Berücksichtigung von $R/c_v = \kappa - 1$ mit $\kappa = c_p/c_v$ (Adiabatexponent), erhält man nach Integration und Ersetzen der dabei auftretenden Konstanten über den Ruhezustand (Index 0) die **Adiabatengleichungen für ideale Gase**:

$$\boxed{\left(\frac{T}{T_0}\right) = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\kappa-1}, \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\kappa}}. \quad (6.41)$$

Schallgeschwindigkeit Abbildung 6.3a zeigt die Ausbreitung einer ebenen Druckwelle kleiner Amplitude Δp . Der Zustand vor der Welle sei durch p, ρ und $u = 0$ gegeben. Hinter der Welle sind diese Größen um $\Delta p, \Delta \rho$ und Δu geändert. Die unbekannte Geschwindigkeit der Welle ist c . Da die Amplitude der Welle klein ist, entspricht diese Geschwindigkeit der Schallgeschwindigkeit. Wir betrachten nun den Ausbreitungsvorgang im Bezugssystem der Welle, vgl.

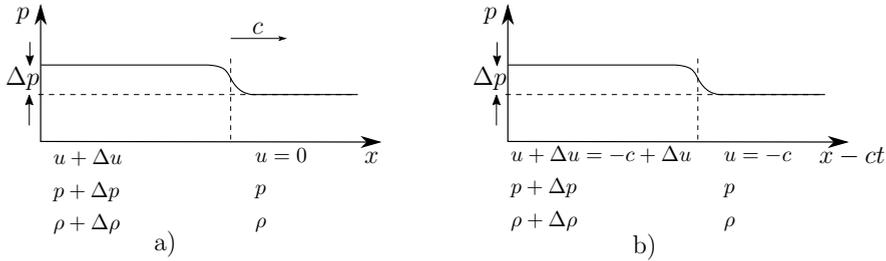


Abbildung 6.3: Rechtslaufende Druckwelle: a) Laborsystem, b) Bezugssystem der Druckwelle.

Abbildung 6.3b. Kontinuität erfordert gleiche Stromdichte ρu vor und nach der Welle:

$$\rho \cdot u = (\rho + \Delta\rho)(u + \Delta u) = \rho u + \rho\Delta u + (\Delta\rho)u + \Delta\rho\Delta u. \quad (6.42)$$

Nicht nur die Druckamplitude, sondern auch die resultierenden Änderungen in der Geschwindigkeit und in der Dichte sind klein. Daher können wir die rechte Seite linearisieren, also den quadratisch kleinen Term fortlassen. Mit $u = -c$ ergibt sich

$$\Delta u \approx +\frac{\Delta\rho}{\rho}c. \quad (6.43)$$

Über die Welle hinweg bleibt auch der Impuls erhalten:

$$\rho u^2 + p = (\rho + \Delta\rho)(u + \Delta u)^2 + (p + \Delta p). \quad (6.44)$$

Linearisiert man wieder und ersetzt die Geschwindigkeitsänderung Δu über Gleichung (6.43), so folgt:

$$0 = \rho 2u\Delta u + \Delta\rho \cdot u^2 + \Delta p + \text{quadr. Terme} \quad (6.45)$$

$$\Rightarrow 0 \approx -\rho 2c \left(\frac{\Delta\rho}{\rho} \cdot c \right) + \Delta\rho c^2 + \Delta p \quad (6.46)$$

$$\Rightarrow c^2 \approx \frac{\Delta p}{\Delta\rho}. \quad (6.47)$$

Für kleine Störungen kann der Differenzenquotient durch den Differentialquotienten ersetzt werden. Unter Beachtung, dass in der Druckwelle Zustandsänderungen adiabatisch verlaufen, erhalten wir für die **Schallgeschwindigkeit**:

$$c^2 = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_{\text{adiab.}}. \quad (6.48)$$

Für ideale Gase folgt mit der Adiabatengleichung für p und ρ sowie mit der thermischen Zustandsgleichung:

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\kappa RT}. \quad (6.49)$$

Die Schallgeschwindigkeit hängt allein von der Temperatur ab! Dies kann ausgenutzt werden, um die Temperatur in der Gleichung für die Enthalpie durch die Schallgeschwindigkeit zu ersetzen. Mit

$$c_p T = c_p \frac{c^2}{\kappa R} = c_p \frac{c^2}{c_p/c_v(c_p - c_v)} = \frac{c^2}{\kappa - 1} \quad (6.50)$$

folgt für die Enthalpie idealer Gase:

$$h = c_p T = \frac{1}{\kappa - 1} c^2. \quad (6.51)$$

Damit nimmt die Energiegleichung 6.34 für ideale Gase eine einfache Form an:

$$\frac{c^2}{\kappa - 1} + \frac{u^2}{2} = \frac{c_0^2}{\kappa - 1}. \quad (6.52)$$

In dieser Gleichung treten nur noch Geschwindigkeiten auf. Dabei ist c_0 die Ruheschallgeschwindigkeit. Das Verhältnis der lokalen Strömungs- (u) und Schallgeschwindigkeit (c) ist definiert als die

Mach-Zahl

$$M := \frac{u}{c}. \quad (6.53)$$

Mit dieser Definition für die Mach-Zahl erhält man aus der Energiegleichung 6.52 nach Multiplikation mit $(\kappa - 1)/c^2$:

$$1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2 = \frac{c_0^2}{c^2} = \frac{T_0}{T}. \quad (6.54)$$

Unter Verwendung der Adiabatengleichungen lassen sich damit die Zustandsgrößen, skaliert mit ihren jeweiligen Ruhewerten, als Funktion der Mach-Zahl schreiben:

$$\frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right)^{-1}, \quad (6.55)$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right)^{-\frac{1}{\kappa - 1}}, \quad (6.56)$$

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\kappa = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right)^{-\frac{\kappa}{\kappa - 1}}. \quad (6.57)$$

Diskussion

i) Die intensiven Zustandsgrößen Temperatur T , Dichte ρ und Druck p , skaliert mit ihren jeweiligen Ruhewerten, sind unter der eingangs gemachten Voraussetzung isentroper Strömung (keine Reibung etc.) Funktionen allein der Mach-Zahl und des Adiabatenkoeffizienten κ . Mit z als Repräsentant einer der Zustandsgrößen und mit z_0 als dem zugehörigen Ruhewert gilt:

$$\frac{z}{z_0} = f(M, \kappa). \quad (6.58)$$

ii) Für die Geschwindigkeit u gilt:

$$u = \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1} (c_0^2 - c^2)} = \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1} \kappa R (T_0 - T)}. \quad (6.59)$$

Die Geschwindigkeit steigt mit fallender Temperatur. Dies entspricht einer Umwandlung thermischer Energie in kinetische Energie. Es existiert eine maximale Geschwindigkeit u_{\max} , die für $T \rightarrow 0$ K erreicht wird:

$$u_{\max} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1} RT_0} = \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1}} c_0. \quad (6.60)$$

Für Luft unter Normalbedingungen ($\kappa = 7/5, T_0 = 293 \text{ K} \hat{=} 20^\circ \text{C}$):

$$u_{\max, \text{Luft}} \approx 767 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

iii) Als **kritischer Zustand** ist der Zustand definiert, der vorliegt, wenn die Strömungsgeschwindigkeit gerade der Schallgeschwindigkeit gleicht. Dann ist mit $u = c$ die Mach-Zahl $M = u/c = 1$. Der kritische Zustand wird mit dem Index \star gekennzeichnet. Für Luft ($\kappa = 7/5$) folgt aus den Gleichungen (6.49), (6.55)-(6.57):

$$\begin{aligned} \frac{T_\star}{T_0} &= \frac{2}{\kappa + 1} = 0,83, & \frac{c_\star}{c_0} &= \sqrt{\frac{2}{\kappa + 1}} = 0,91, \\ \frac{\rho_\star}{\rho_0} &= \left(\frac{2}{\kappa + 1}\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} = 0,63, & \frac{p_\star}{p_0} &= \left(\frac{2}{\kappa + 1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} = 0,53. \end{aligned} \quad (6.61)$$

iv) Die **Stromdichte** $\Theta = \rho u$ ist im Ruhezustand Null. Der Ruhezustand eignet sich daher nicht zum Entdimensionalisieren dieser Größe. Stattdessen nimmt man

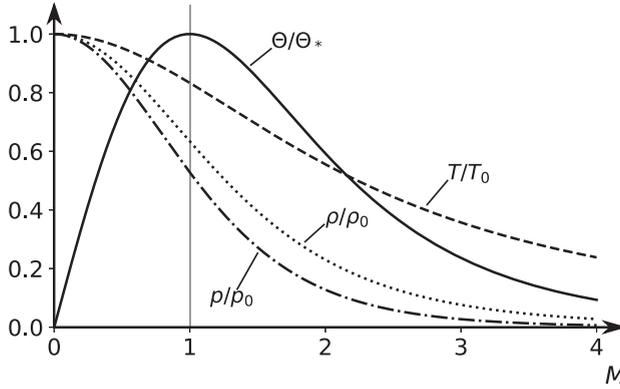


Abbildung 6.4: Abhängigkeit verschiedener Größen von der Mach-Zahl (für Luft, $\kappa = 1,4$).

ihren kritischen Wert, $\Theta_* = \rho_* u_* = \rho_* c_*$. Mit den Beziehungen für die kritischen Größen erhält man:

$$\Theta_* = \rho_* c_* = \left[\rho_0 \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \right] \left[c_0 \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (6.62)$$

$$\Rightarrow \Theta_* = \rho_0 c_0 \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}} \quad (6.63)$$

Damit skalieren wir die Stromdichte:

$$\frac{\Theta}{\Theta_*} = \frac{\rho \cdot u}{\rho_* \cdot u_*} = \frac{\rho u}{\rho_0 c_0} \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{-\frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{c}{c_0} \frac{u}{c} \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{-\frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}} \quad (6.64)$$

ρ/ρ_0 und c/c_0 sind bekannte Funktionen der Mach-Zahl (Gleichungen (6.56) und (6.49) mit (6.55)). Setzt man diese in die letzte Gleichung ein, sieht man, dass auch die dimensionslose Stromdichte nur von der Mach-Zahl abhängt:

$$\frac{\Theta}{\Theta_*} = M \left(\frac{2 + (\kappa - 1) M^2}{\kappa + 1} \right)^{-\frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}} \quad (6.65)$$

Für $M = 0$ und $M \rightarrow \infty$ ist $\Theta/\Theta_* = 0$. Dazwischen existiert ein Maximum, das bei $M = 1$ erreicht wird, mit $(\Theta/\Theta_*)_{\max} = 1$. Abbildung 6.4 zeigt die Abhängigkeit der dimensionslosen Stromdichte und verschiedener anderer Zustandsgrößen von der Mach-Zahl.

v) **Laval-Düse** (nach Gustaf de Laval, 1845 – 1913, einem schwedischen Ingenieur) Der im letzten Punkt abgeleitete Zusammenhang zwischen Stromdichte und Mach-Zahl ermöglicht die Erzeugung von **Überschallströmungen** mittels einer Laval-Düse. In einer Stromröhre (Düse) veränderlichen Querschnitts gilt bei stationärer Strömung die Kontinuitätsgleichung in folgender Form:

$$\rho u A = \Theta A = \Theta_* A_* = \text{const}, \quad (6.66)$$

wobei A_* die Querschnittsfläche bezeichnet, bei der gerade der kritische Zustand erreicht wird. Es folgt:

$$\frac{\Theta}{\Theta_*} = \frac{A_*}{A}. \quad (6.67)$$

Wir betrachten die Beschleunigung einer Strömung von $u = 0$, also auch $M = 0$, bis in den Überschallbereich ($M > 1$). Für $M = 0$ ist $\Theta = 0$ und damit gilt $A \rightarrow \infty$. Mit steigender Mach-Zahl nimmt die Stromdichte zu (vgl. Abbildung 6.5), d.h., die Querschnittsfläche muss abnehmen. Bei $M = 1$ wird die maximale Stromdichte und damit auch die minimale Querschnittsfläche A_* erreicht. Mit weiter steigender Mach-Zahl nimmt die Stromdichte wieder ab, die Querschnittsfläche muss wieder zunehmen. Eine Beschleunigung der Strömung über die Mach-Zahl $M = 1$ hinaus erfordert also eine konvergent-divergente Düse. Mit der Mach-Zahl sind dann auch alle Zustandsgrößen (skaliert mit ihren Ruhegrößen) bestimmt. Eine Düse dieser Art, die der Erzeugung von Überschallströmungen dient, nennt man **Laval-Düse**.

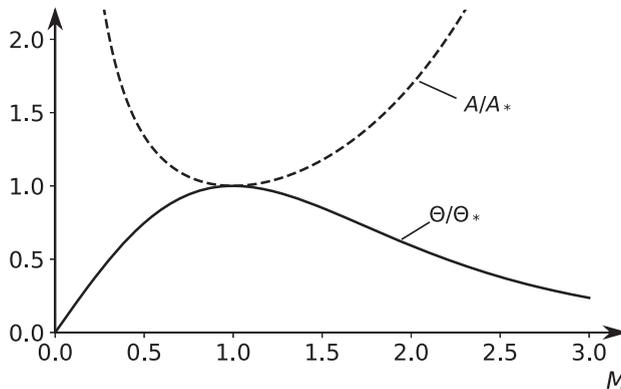


Abbildung 6.5: Stromdichte und Strömungsquerschnitt als Funktion der Mach-Zahl.

Damit es überhaupt zu einer Strömung durch die Düse kommt, muss der Druck auf der stromauf liegenden Seite der Düse größer sein als auf der stromab liegenden. Eine Überschallströmung entsteht jedoch nur, wenn der Druck am Düsenende

genügend tief liegt. Je nach Druck p_e am Düsenende stellen sich verschiedene Strömungen und damit Druckverläufe in der Laval-Düse ein. Einige Druckverläufe sind in Abbildung 6.6 in Abhängigkeit vom Druck p_e am Düsenende dargestellt. Auf der Abszisse ist das Querschnittsverhältnis A/A_* aufgetragen, das zunächst ab- und dann wieder zunimmt. Weit stromauf ist die Düse an einen Kessel angeflanscht. Dort ruht das Gas, d.h. $p = p_0$ und $A/A_* \rightarrow \infty$ (hier nicht dargestellt). Das Düsenende liegt in diesem Beispiel bei einem Querschnittsverhältnis $A_e/A_* = 1,75$.

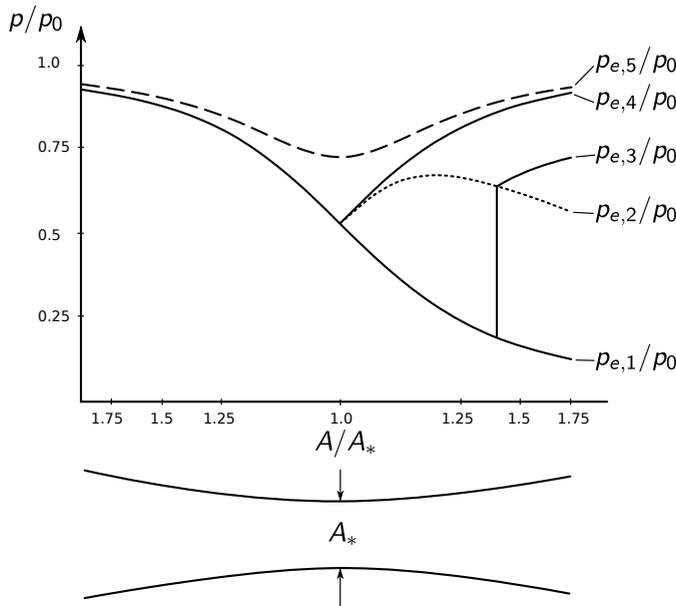


Abbildung 6.6: Druckverläufe in einer Laval-Düse.

Für alle Enddrücke $p_e \leq p_{e,4}$ (vgl. Abbildung 6.6) steigt die Mach-Zahl im konvergenten Düsenteil mit abnehmender Querschnittsfläche entsprechend des in Abbildung 6.5 gezeigten Zusammenhanges zwischen A/A_* und M . Der Druck nimmt ab und erreicht bei $A/A_* = 1$ seinen kritischen Wert, vgl. Abbildung 6.4. Dort wird dann gerade die Schallgeschwindigkeit erreicht. Wie es im divergenten Teil der Düse weiter geht, hängt vom konkreten Wert des Enddrucks p_e ab:

- $p_e = p_{e,1}$: $p_{e,1}$ stimmt mit der zum Querschnittsverhältnis A_e/A_* am Düsenende gehörenden Mach-Zahl $M > 1$ überein. Im divergenten Düsenteil herrscht Überschall. Der Druckverlauf folgt der in Abbildung 6.4 dargestellten Abhängigkeit von der Mach-Zahl für $M > 1$.

- $p_e = p_{e,4}$: $p_{e,4}$ stimmt mit der zum Querschnittsverhältnis A_e/A_* am Düsenende gehörenden Mach-Zahl $M < 1$ überein. Im divergenten Düsenteil herrscht Unterschall. Der Druckverlauf folgt der in Abbildung 6.4 dargestellten Abhängigkeit von der Mach-Zahl für $M < 1$.
- $p_e < p_{e,1}$: In der Düse verhält sich der Druck wie im Fall $p_e = p_{e,1}$. Am Düsenende ist der Druck damit größer als der außen herrschende Druck: Beim Austritt aus der Düse expandiert der Freistrah.
- $p_{e,1} < p_e < p_{e,2}$: In der Düse verhält sich der Druck wie im Fall $p_e = p_{e,1}$. Am Düsenende ist der Druck damit kleiner als der außen herrschende Druck. Im aus der Düse austretenden Freistrah kommt es durch Druckwellen zum Druckausgleich.
- $p_{e,2} < p_e < p_{e,4}$: Hier ist der Druck außen so groß, dass es bereits in der Düse zu einer Änderung des Druckverlaufs kommt. Der Druck „springt“ unstetig auf einen höheren Wert. Es tritt ein sogenannter **Verdichtungsstoß** auf. Verdichtungsstöße sind Gegenstand des nächsten Kapitels. In Abbildung 6.6 ist dieser Fall am Beispiel $p_e = p_{e,3}$ dargestellt.
- $p_e > p_{e,4}$: Der Druck liegt in der gesamten Düse über dem kritischen Druck, es herrscht überall Unterschall, vgl. die Kurve zu $p_e = p_{e,5}$. Im konvergenten Teil nimmt die Stromdichte (und die Mach-Zahl) mit kleiner werdender Querschnittsfläche zu, erreicht aber am engsten Querschnitt der Düse nicht ihren kritischen Wert. Im divergenten Düsenteil nimmt die Stromdichte, und damit auch die Mach-Zahl, wieder ab.

6.2.2 Verdichtungsstöße

In Strömungen können abrupte Änderungen des thermodynamischen Zustandes und der Strömungsgeschwindigkeit auftreten (s.o., Lavaldüse mit $p_{e,2} < p_e < p_{e,4}$). Der Zustand ändert sich dabei innerhalb einer extrem kurzen Laufstrecke der Strömung, die Zustandsänderung geschieht praktisch diskontinuierlich. Im Strömungsfeld kann man dann den Ort der Zustandsänderung als eine Diskontinuitätsfläche ansehen. Diese wird **Stoßwelle** (*shock wave*) genannt. Wir werden sehen, dass in idealen Gasen über eine Stoßwelle hinweg nur Verdichtungen möglich sind. Daher bezeichnet man Stoßwellen dort auch als **Verdichtungsstöße** (*compression shocks*).

Zur Illustration betrachten wir eine rechtslaufende Druckwelle in einem idealen Gas. Die Welle breitet sich mit Schallgeschwindigkeit aus. Die Schallgeschwindigkeit

kann als Funktion des Drucks und der Dichte geschrieben werden:

$$c^2 = \kappa \frac{p}{\rho}. \quad (6.68)$$

Für adiabatische Zustandsänderungen in einer Welle folgt mit

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1/\kappa} \Rightarrow c^2 = \kappa \frac{p_0^{1/\kappa}}{\rho_0} \cdot p^{1-1/\kappa} \propto p^{1-1/\kappa}, \quad \text{bzw.} \quad c(p) \propto p^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}. \quad (6.69)$$

Damit gilt:

$$\frac{dc}{dp} \propto \frac{\kappa-1}{2\kappa} p^{-\frac{\kappa+1}{2\kappa}} > 0. \quad (6.70)$$

Bereiche der Welle mit erhöhtem Druck breiten sich schneller aus als solche mit verringertem Druck. Dies führt dazu, dass eine sinusförmige Welle im Verlauf ihrer Ausbreitung ihre Form ändert, sich „aufsteilt“. Dies ist in Abbildung 6.7 skizziert. Nach genügend langer Zeit müsste sich die Welle „überschlagen“, der Druck mehrwertig werden. Dies ist physikalisch nicht möglich. Stattdessen kommt es zu einem praktisch un stetigen Übergang zwischen hohem und niedrigem Druck (vgl. die gestrichelte Linie bei $t = t_3$ in Abbildung 6.7). Im Bezugssystem der rechtslaufenden Welle strömt das Gas von rechts in diese hinein und erfährt eine Druck- und damit auch eine Dichteerhöhung. Es liegt ein Verdichtungsstoß vor.

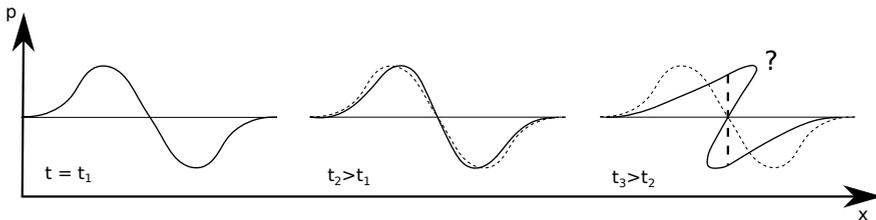


Abbildung 6.7: Rechtslaufende Druckwelle.

Das Aufsteilen von Druckwellen kann man in Rohrleitungen demonstrieren. Führt man an einem Ende sinusförmige Störungen ein, so kommen am anderen Ende „Knackgeräusche“ heraus. In alten Wasserleitungen kann beim schnellen Schließen eines Wasserhahns im Wasser eine Stoßwelle (Wasserschlag) entstehen, die sich durch hämmernde Geräusche bemerkbar macht. Hier steigt mit abnehmendem Durchfluss am Hahn der Druck, es entsteht eine Druck- und schließlich eine Stoßwelle. Auch der Donner bei Gewittern beruht auf Verdichtungsstößen. Hohe Temperaturen im Blitzkanal führen zu einer Expansion. Es bildet sich eine Stoßwelle, die sich radial ausbreitet. In diesen Beispielen erfolgt die Zuströmung senkrecht zur Stoßfläche, es liegt ein senkrechter Verdichtungsstoß vor.

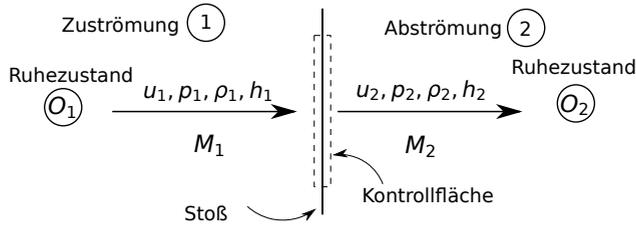


Abbildung 6.8: Senkrechter Verdichtungsstoß.

Beim Durchgang des Fluids durch eine Stoßwelle, abkürzend auch einfach als Stoß bezeichnet, bleiben Masse, Impuls und Energie erhalten. Dies betrachten wir im Folgenden für einen senkrechten Stoß, vgl. Abbildung 6.8. Dann gelten die Erhaltungsgleichungen für:

$$\text{Masse:} \quad \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2, \quad (6.71)$$

$$\text{Impuls:} \quad p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2, \quad (6.72)$$

$$\text{Energie:} \quad h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}. \quad (6.73)$$

Bei bekannter Zuströmung (Index 1) werden mögliche Zustände und Geschwindigkeiten hinter dem Stoß (Index 2) gesucht. Es gibt mehrere Lösungen:

- triviale Lösung: $u_1 = u_2$, $p_1 = p_2$ etc., d.h. es liegt kein Stoß vor,
- weitere Lösungen, die auf den Nichtlinearitäten in den Gleichungen beruhen.

Die weiteren Lösungen finden wir wie folgt: Durch Einsetzen von Gleichung (6.71) in Gleichung (6.72), wobei einmal $\rho_2 u_2$ und einmal $\rho_1 u_1$ ersetzt wird, erhält man die beiden Gleichungen:

$$\rho_1 u_1^2 - \rho_1 u_1 u_2 = p_2 - p_1 \Leftrightarrow u_1^2 - u_1 u_2 = \frac{p_2 - p_1}{\rho_1}, \quad (6.74)$$

$$\rho_2 u_2 u_1 - \rho_2 u_2^2 = p_2 - p_1 \Leftrightarrow u_2 u_1 - u_2^2 = \frac{p_2 - p_1}{\rho_2}. \quad (6.75)$$

Die Summe der beiden rechts stehenden Gleichungen ergibt:

$$u_1^2 - u_2^2 = \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) (p_2 - p_1). \quad (6.76)$$

Hier ersetzen wir die Differenz der Geschwindigkeitsquadrate über die Energiegleichung (6.73) und erhalten so die

Rankine-Hugoniot-Beziehung

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) (p_2 - p_1). \quad (6.77)$$

Die Rankine-Hugoniot-Beziehung verknüpft die thermodynamischen Größen vor und hinter einem Stoß miteinander. Geschwindigkeiten gehen nicht ein. Die Beziehung gilt ganz allgemein, da bisher noch keine Annahmen über Zustandsgleichungen gemacht wurden.

Wenn sich die Zustände vor und hinter dem Stoß nur geringfügig unterscheiden, spricht man von einem **schwachen Stoß**. Dann ist:

$$h_2 - h_1 \approx \boxed{dh = \frac{1}{\rho} dp} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) (p_2 - p_1). \quad (6.78)$$

Mit der Definition $h = e + p/\rho$ folgt für das totale Differential der Enthalpie:

$$dh = de + p d\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} dp. \quad (6.79)$$

Der Vergleich der letzten beiden Gleichungen für dh liefert:

$$de + p d\frac{1}{\rho} = 0. \quad (6.80)$$

Dies vergleichen wir nun mit der Gibbs'schen Fundamentalgleichung,

$$T ds = de + p d\frac{1}{\rho}. \quad (6.81)$$

Hier bezeichnet s die spezifische Entropie. Der Vergleich zeigt, dass $ds = 0$.

Bei schwachen Stößen ist die Entropieänderung vernachlässigbar klein.

Die Rankine-Hugoniot-Beziehung sowie die Aussage über Entropieänderungen bei schwachen Stößen sind unabhängig von bestimmten Zustandsgleichungen. Um konkretere Aussagen machen zu können, spezialisieren wir uns im Folgenden auf ideale Gase. Für ideale Gase gelten die Beziehungen

$$e = c_V T, \quad h = c_p T = \frac{c^2}{\kappa - 1}, \quad p = \rho R T. \quad (6.82)$$

Die Änderung der Entropie wird wieder durch die Gibbs'sche Fundamentalgleichung beschrieben. Für ideale Gase folgt:

$$ds = c_V \frac{dT}{T} + \rho R d\left(\frac{1}{\rho}\right) = c_V \left[\frac{dT}{T} - \frac{R}{c_V} \frac{d\rho}{\rho} \right]. \quad (6.83)$$

Integration, ausgehend von einem Bezugszustand (Index 0) und mit $R/c_V = \kappa - 1$, ergibt die Entropie als Funktion von Temperatur und Dichte:

$$s = s_0 + c_V \left[\ln \frac{T}{T_0} - (\kappa - 1) \ln \frac{\rho}{\rho_0} \right]. \quad (6.84)$$

Unter Berücksichtigung der thermischen Zustandsgleichung, $p = \rho RT$, lässt sich die Entropie auch als Funktion anderer Zustandsgrößen schreiben

$$s = s_0 + c_V \ln \left[\frac{T}{T_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{-(\kappa-1)} \right] \quad (6.85)$$

$$= s_0 + c_V \ln \left[\left(\frac{T}{T_0} \right)^\kappa \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-(\kappa-1)} \right] \quad (6.86)$$

$$= s_0 + c_V \ln \left[\left(\frac{p}{p_0} \right) \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{-\kappa} \right]. \quad (6.87)$$

Als nächstes geben wir auch die Rankine-Hugoniot-Beziehung für ideale Gase an. Mit $h = c^2/(\kappa - 1) = \kappa/(\kappa - 1) p/\rho$ folgt:

$$h_2 - h_1 = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) (p_2 - p_1). \quad (6.88)$$

Auflösen dieser Gleichung nach ρ_2/ρ_1 liefert die

Rankine-Hugoniot-Beziehung für ideale Gase

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \frac{p_2}{p_1}}{\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} + \frac{p_2}{p_1}}. \quad (6.89)$$

Für starke Stöße, d.h., $p_2/p_1 \rightarrow \infty$, folgt

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \rightarrow \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \quad \text{für} \quad \frac{p_2}{p_1} \rightarrow \infty. \quad (6.90)$$

Bei einem Stoß ist der Anstieg der Dichte, anders als bei isentroper Zustandsänderung, durch eine obere Schranke beschränkt, vgl. Abbildung 6.9.

Stoßrelationen für ideale Gase Aus den Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie (6.71-6.73) lassen sich Beziehungen zwischen den Größen vor und hinter einer Stoßwelle als Funktion der Mach-Zahl M_1 vor dem Stoß ableiten. Mit $M_1 = u_1/c_1$, $M_2 = u_2/c_2$ und $c^2 = \kappa p/\rho$ erhält man:

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\kappa}{\kappa + 1} (M_1^2 - 1), \quad (6.91)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = 1 + \frac{2(M_1^2 - 1)}{2 + (\kappa - 1)M_1^2}, \quad (6.92)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad (6.93)$$

$$M_2^2 = \frac{\kappa + 1 + (\kappa - 1)(M_1^2 - 1)}{\kappa + 1 + 2\kappa(M_1^2 - 1)}. \quad (6.94)$$

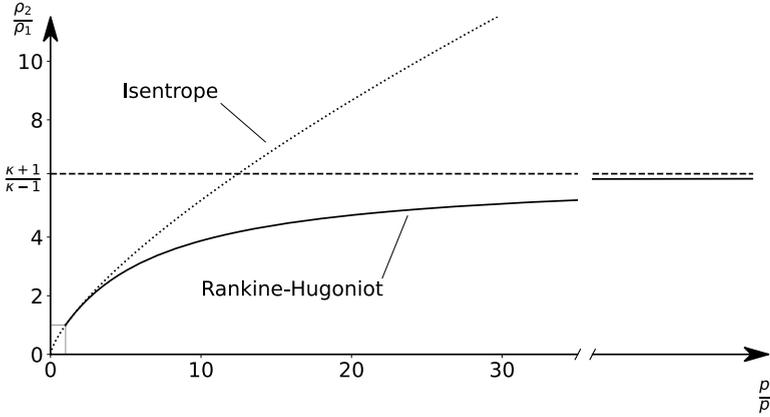


Abbildung 6.9: Vergleich der Rankine-Hugoniot-Beziehung mit der Isentropen (für Luft, $\kappa = 1,4$).

Auch die Entropie ändert sich beim Durchgang durch einen Stoß. Dies sieht man, wenn man in Gleichung (6.87) für die Entropie den Zustand vor dem Stoß als Bezugszustand wählt, $s_1 = s_0$, und $s_2 = s$ setzt. Gleiches gilt für die Zustandsgrößen Druck und Dichte. Mit den Stoßrelationen für p_2/p_1 und ρ_2/ρ_1 erhält man:

$$s_2 - s_1 = c_V \ln \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right) \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{-\kappa} \right] \quad (6.95)$$

$$= c_V \ln \left[\left(1 + \frac{2\kappa}{\kappa + 1} (M_1^2 - 1) \right) \left(1 + \frac{2(M_1^2 - 1)}{2 + (\kappa - 1) M_1^2} \right)^{-\kappa} \right]. \quad (6.96)$$

Die Entropieänderung über einen Stoß ist damit ebenfalls eine Funktion der Mach-Zahl M_1 vor dem Stoß. Es ist:

$$s_2 - s_1 = \begin{cases} > 0 & \text{für } M_1 > 1, \\ < 0 & \text{für } M_1 < 1. \end{cases} \quad (6.97)$$

Nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik kann die Entropie nicht abnehmen, es muss gelten $s_2 - s_1 \geq 0$. Daher sind Lösungen der Stoßrelationen mit $M_1 < 1$ physikalisch nicht möglich. Mit $M_1 > 1$ folgt (vgl. die Stoßrelationen):

$$M_1 > 1 \quad \Rightarrow \quad p_2 > p_1, \quad \rho_2 > \rho_1, \quad T_2 > T_1, \quad M_2 < M_1. \quad (6.98)$$

Für den Fall $M_1 = 1$ ändert sich nichts, es liegt kein Stoß vor.

Im Fall idealer Gase gelten hiernach die folgenden Aussagen:

- es sind nur Verdichtungsstöße möglich,

- Anströmung relativ zum Stoß: mit Überschallgeschwindigkeit, $M_1 > 1$,
- Abströmung relativ zum Stoß: mit Unterschallgeschwindigkeit, $M_2 < 1$.

Die sich aus den Stoßrelationen (6.91-6.94) ergebenden Zustandsänderungen über einen Verdichtungsstoß sowie die Mach-Zahl hinter dem Stoß sind in Abbildung 6.10 in Abhängigkeit von der Mach-Zahl M_1 vor dem Stoß dargestellt.

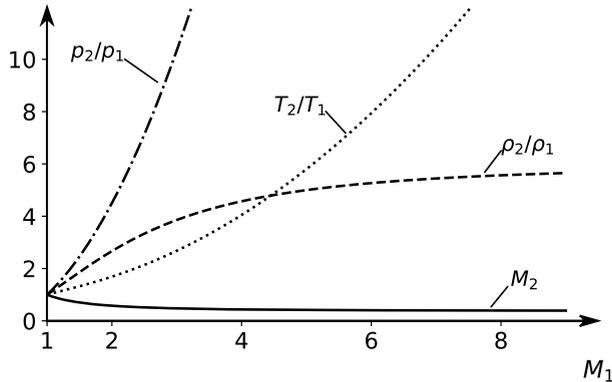


Abbildung 6.10: Senkrechter Stoß: Zustand hinter dem Stoß als Funktion der Mach-Zahl vor dem Stoß (für Luft, $\kappa = 1,4$).

Ruhezustand vor und hinter einem Stoß Die Entropie ändert sich über eine Stoßwelle hinweg. Daher sind die Ruhezustände (*stagnation states*) vor und hinter einem Stoß nicht alle identisch, insbesondere ändert sich der Ruhedruck. Im Folgenden bezeichnen wir den Ruhezustand vor dem Stoß mit dem Index „01“ und hinter dem Stoß mit dem Index „02“. Zuerst betrachten wir die Ruhetemperaturen T_{01} und T_{02} . Aus dem Energiesatz,

$$h + \frac{u^2}{2} = c_p T + \frac{u^2}{2} = c_p T_0 = \text{const}, \quad (6.99)$$

folgt, dass die Ruhetemperaturen vor und hinter dem Stoß tatsächlich gleich sein müssen:

$$\boxed{T_{01} = T_{02}.} \quad (6.100)$$

Abgesehen vom Stoß sei die Strömung isentrop. Dann sind die Entropien vor und hinter dem Stoß gleich den jeweiligen Ruheentropien:

$$s_1 = s_{01}, \quad s_2 = s_{02}. \quad (6.101)$$

Nach Gleichung (6.86) für die Entropieänderung über den Stoß erhält man

$$s_2 - s_1 = c_V \kappa \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - c_V (\kappa - 1) \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \quad (6.102)$$

$$= s_{02} - s_{01} = \underbrace{c_V \kappa \ln \left(\frac{T_{02}}{T_{01}} \right)}_{=0} - R \ln \left(\frac{p_{02}}{p_{01}} \right). \quad (6.103)$$

In der letzten Gleichung verschwindet $\ln(T_{01}/T_{02})$, da $T_{01} = T_{02}$. Weiterhin ist nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik $s_2 - s_1 \geq 0$, also

$$s_2 - s_1 = -R \ln \left(\frac{p_{02}}{p_{01}} \right) \geq 0. \quad (6.104)$$

Daraus folgt für die Ruhedrucke vor und hinter einem Stoß:

$$\boxed{p_{02} \leq p_{01}}. \quad (6.105)$$

Dies bezeichnet man als

Ruhedruckverlust

 Hinter Verdichtungsstößen ist
 der Ruhedruck geringer als davor.

Das Verhältnis der Ruhedrucke erhält man über Gleichung (6.87) für die Entropieänderung und mit $c_v/R = 1/(\kappa - 1)$ wie folgt:

$$s_2 - s_1 = c_V \ln \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right) \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{-\kappa} \right] = -R \ln \left(\frac{p_{02}}{p_{01}} \right) \quad (6.106)$$

$$\Rightarrow \frac{p_{02}}{p_{01}} = \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right) \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{-\kappa} \right]^{-\frac{1}{\kappa-1}}. \quad (6.107)$$

Hierbei sind die Verhältnisse p_2/p_1 und ρ_2/ρ_1 über die Stoßrelationen (6.91) und (6.92) für Druck und Dichte als Funktion der Mach-Zahl gegeben. Damit ist auch das Verhältnis der Ruhedrucke für ein ideales Gas mit bekanntem Adiabatenexponenten eine Funktion allein der Mach-Zahl M_1 vor dem Stoß, vgl. Abbildung 6.11. Dies wird ausgenutzt, um Mach-Zahlen in Überschallströmungen über eine Druckmessung zu bestimmen (s.u.).

Schiefe Verdichtungsstöße Bisher haben wir senkrechte Stöße betrachtet. Bei diesen erfolgt die Zuströmung senkrecht zur Stoßfläche, vgl. Abbildung 6.12a. Wir betrachten nun den senkrechten Stoß aus einem mit Geschwindigkeit $-v < 0$ parallel zur Stoßfläche bewegten Bezugssystem (Galilei-Transformation). An

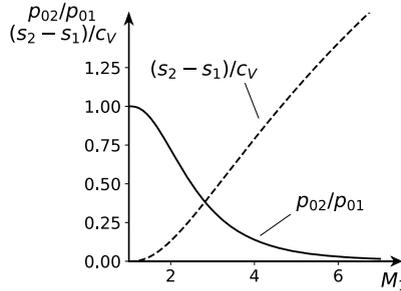


Abbildung 6.11: Senkrechter Stoß: Ruhedruckverlust und Entropieänderung als Funktion der Mach-Zahl vor dem Stoß (für Luft, $\kappa = 1,4$).

den thermodynamischen Größen (p , ρ , T , s) vor und hinter dem Stoß ändert sich dadurch nichts. Im neuen Bezugssystem besitzt das Gas dann jedoch eine Geschwindigkeitskomponente $v > 0$ tangential zum Stoß. Die Zuströmung zur Stoßwelle erfolgt daher nicht mehr senkrecht, sondern mit der Geschwindigkeit w_1 unter einem Stoßwinkel $\beta < 90^\circ$ zur Stoßfläche, vgl. Abbildung 6.12b. Man spricht von einem **schiefen** oder auch **schrägen Stoß** (*oblique shock*). Hinter dem Stoß herrscht die Geschwindigkeit w_2 . Da die Tangentialgeschwindigkeit v vor und hinter dem Stoß gleichbleibt, ändert sich beim Durchgang durch den Stoß die Strömungsrichtung um den Ablenkwinkel ϑ . Für den **Stoßwinkel** β und den **Ablenkwinkel** ϑ folgt aus Abbildung 6.12b:

$$\beta = \arctan\left(\frac{u_1}{v}\right), \quad \beta - \vartheta = \arctan\left(\frac{u_2}{v}\right). \quad (6.108)$$

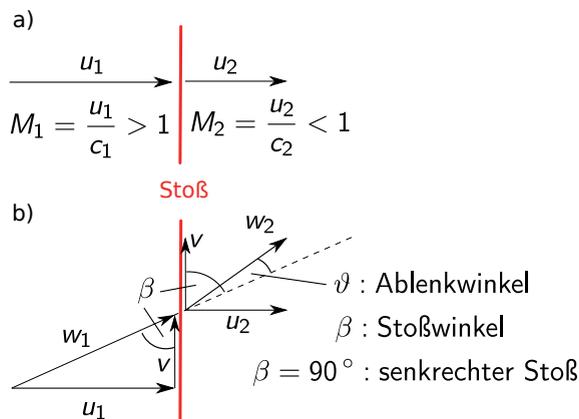


Abbildung 6.12: a) senkrechter Verdichtungsstoß, b) schiefer Verdichtungsstoß.

Aus einem senkrechten Verdichtungsstoß mit vorgegebener Anströmgeschwindigkeit $u_1 > c_1$ erhält man so durch Überlagerung einer Tangentialgeschwindigkeit v eine Familie schiefer Stöße mit

$$w_1 \sin \beta = u_1. \quad (6.109)$$

Die Stoßrelationen sind invariant gegenüber der Galilei-Transformation. Sie gelten für die Geschwindigkeitskomponente u_1 senkrecht zur Stoßfläche, also für

$$M_1 \sin \beta = \frac{w_1}{c_1} \sin \beta = \frac{u_1}{c_1}. \quad (6.110)$$

Für schiefe Stöße gilt folglich mit $M_1 = w_1/c_1$ und $M_2 = w_2/c_2$:

$$M_1 \sin \beta > 1, \quad M_2 \sin(\beta - \vartheta) < 1. \quad (6.111)$$

Die Beziehung für M_2 drückt aus, dass hinter dem Stoß die senkrechte Geschwindigkeitskomponente u_2 kleiner als die Schallgeschwindigkeit sein muss. Hierbei kann jedoch für die Mach-Zahl hinter dem Stoß durchaus gelten $M_2 = w_2/c_2 > 1$, die Abströmung also mit Überschall erfolgen.

Die Größe der Ablenkung ϑ der Strömung durch einen schiefen Stoß hängt von der Mach-Zahl M_1 und dem Stoßwinkel β ab. Bei gegebener Mach-Zahl $M_1 > 1$ tritt in zwei Fällen keine Ablenkung auf:

- senkrechter Stoß: $\beta = 90^\circ$,
- unendlich schwacher Stoß: $M_1 \sin \beta = 1$, also für $\beta = \arcsin(1/M_1)$.

Für Stoßwinkel β , die zwischen diesen beiden Winkeln liegen ($\arcsin(1/M_1) < \beta < 90^\circ$), kommt es zu einer Ablenkung der Strömung. Der Zusammenhang zwischen Stoß- und Ablenkwinkel ist in Abbildung 6.13 für eine konstante Mach-Zahl $M_1 > 1$ skizziert (den genauen Zusammenhang kann man aus den Gleichungen (6.108) und den Stoßrelationen ableiten). Es gilt:

- für jedes $M_1 > 1$ existiert ein maximaler Ablenkwinkel ϑ_{\max} ,
- ein bestimmter Ablenkwinkel $\vartheta < \vartheta_{\max}$ ist über zwei verschiedene Stoßwinkel β , β_1 und β_2 , erreichbar.

Experimentell stellt sich meist der kleinere Stoßwinkel ein. Über geeignete geometrische Anordnungen lässt sich jedoch auch die Lösung mit dem größeren Stoßwinkel erzwingen.

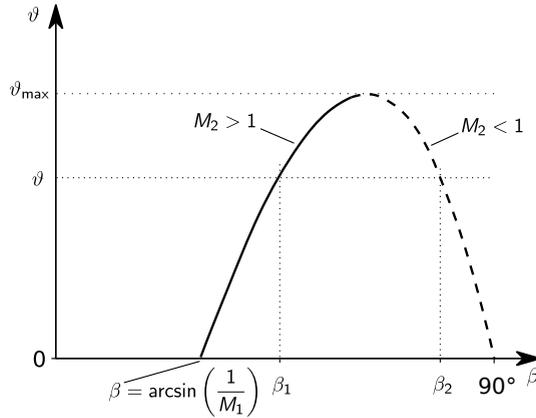


Abbildung 6.13: Schiefer Verdichtungsstoß: Zusammenhang zwischen Stoßwinkel β und Ablenkwinkel ϑ bei konstanter Mach-Zahl M_1 vor dem Stoß.

Beispiel: Keil in Überschallströmung

Vor einem Keil mit Öffnungswinkel $2\vartheta_{\text{Keil}}$, der mit Überschall angeströmt wird, bildet sich ein Stoß aus. Was genau passiert, hängt davon ab, ob der halbe Öffnungswinkel ϑ_{Keil} kleiner oder größer ist als der maximale Umlenkwinkel $\vartheta_{\max}(M_1)$, der zur Mach-Zahl M_1 der Anströmung gehört. Die beiden Fälle sind in Abbildung 6.14 dargestellt.

- **Anliegender Stoß** (*attached shock*) Falls $\vartheta_{\text{Keil}} < \vartheta_{\max}(M_1)$, bildet sich auf beiden Seiten des Keils ein gerader schiefer Stoß, der an der Spitze des

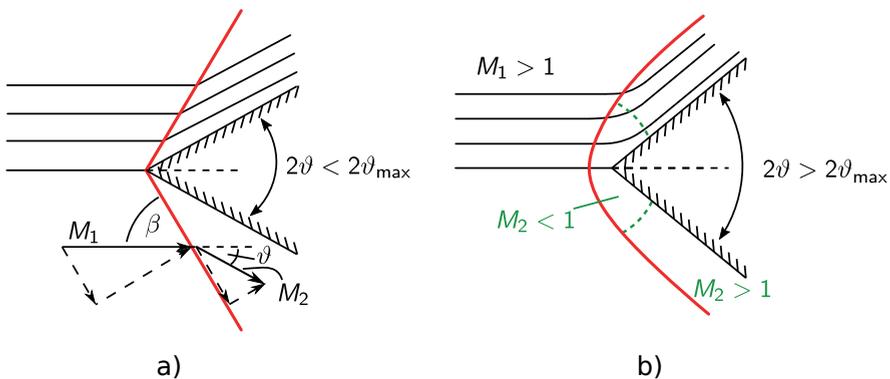


Abbildung 6.14: Keil in Überschallströmung: a) anliegender Stoß, b) abgelöster Stoß.

Keils anliegt (anliegender Stoß), vgl. Abbildung 6.14a. Der Stoßwinkel β stellt sich dabei so ein, dass der Stoß gerade eine Umlenkung um den halben Öffnungswinkel des Keils bewirkt, die Strömung also hinter dem Stoß sofort überall parallel zur Keiloberfläche ausgerichtet ist.

- **Abgelöster Stoß** (*detached shock*) Falls $\vartheta_{\text{Keil}} > \vartheta_{\text{max}}(M_1)$, kann ein schiefer zur Mach-Zahl M_1 gehörender Stoß eine sofortige Umlenkung um den Winkel ϑ_{Keil} nicht bewirken. Bereits vor der Keilspitze bildet sich ein abgelöster Stoß, vgl. Abbildung 6.14b. Dieser ist nicht mehr gerade, sondern gekrümmt. Direkt auf der Staupunktstromlinie liegt ein senkrechter Stoß ohne Änderung der Strömungsrichtung vor. Mit zunehmendem Abstand von der Staupunktstromlinie nimmt der Stoßwinkel von $\beta = 90^\circ$ zu beiden Seiten hin ab und die Umlenkung zu. Die stoßbedingte Umlenkung ist jedoch kleiner als der halbe Keilwinkel. Zwischen Stoß und Keil kommt es zu weiterer stetiger Umlenkung, bis die Strömung an der Keiloberfläche schließlich parallel zu dieser ist.

Im Fall des abgelösten Stoßes herrscht auf der Staupunktstromlinie hinter dem senkrechten Stoß Unterschall. Dies gilt auch für daneben liegende Stromlinien. Hinter dem abgelösten Stoß existiert deshalb ein Bereich mit Unterschall. Mit zunehmendem Abstand von der Staupunktstromlinie nimmt der Stoßwinkel jedoch ab und es wird schließlich der Punkt erreicht, wo hinter dem Stoß weiter Überschall

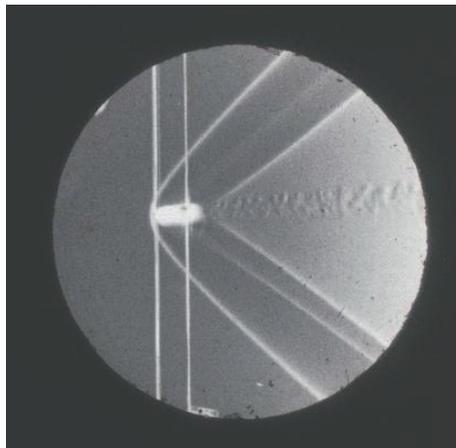


Abbildung 6.15: Abgelöster Verdichtungsstoß vor einem mit Überschall nach links fliegenden Messingprojektil. Die beiden senkrechten Linien sind Elektroden, die der Auslösung des Belichtungsfunken dienen (E. Mach, P. Salcher, 1888, Foto: online Archiv des Deutschen Museums).

herrscht (vgl. Abbildung 6.13). Die ersten Photographien abgelöster Stoßwellen wurden in den 1880er Jahren von Ernst Mach und Peter Salcher an mit Überschall fliegenden Projektilen aufgenommen. Stoßwellen werden dabei aufgrund der großen Dichteunterschiede und damit starken Änderungen des Brechungsindex am Ort des Stoßes sichtbar (Schattenverfahren), siehe Abbildung 6.15. Neben der Stoßwelle vor dem Projektil sind dahinter weitere Wellen erkennbar, die im Rahmen dieser Einführung nicht erläutert werden sollen.

Nach diesen Überlegungen zur Keilumströmung können wir auf die Bestimmung von Mach-Zahlen in Überschallströmungen mittels einer Druckmessung zurückkommen. Dazu hält man ein Pitot-Rohr in die Überschallströmung, siehe Abbildung 6.16. Vor dessen Ende ist der Öffnungswinkel auf jeden Fall größer als der maximale Umlenkwinkel und es stellt sich ein abgelöster Stoß ein. Direkt vor der Öffnung des Pitot-Rohrs ist der Stoß senkrecht. Mit dem Pitot-Rohr wird damit der Ruhedruck p_{02} hinter einem senkrechten Stoß bestimmt. Dazu muss das Pitot-Rohr in Richtung der Anströmung ausgerichtet sein. Bei bekanntem Ruhedruck p_{01} in der Anströmung erhält man dann aus Gleichung (6.107) für das Ruhedruckverhältnis, zusammen mit den Beziehungen (6.91) und (6.92), die Mach-Zahl in der Anströmung.

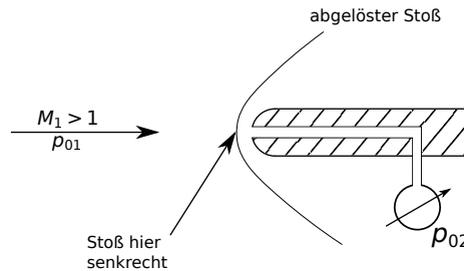


Abbildung 6.16: Prinzip der Mach-Zahlbestimmung in Überschallströmungen mittels eines Pitot-Rohrs.

Kapitel 7

Grenzschichten

7.1 Einleitung

In vielen Strömungen überwiegen Trägheitskräfte die Zähigkeitskräfte deutlich. Die Reynolds-Zahl ist sehr groß und Zähigkeitseffekte spielen in weiten Bereichen des Strömungsfeldes keine oder nur eine untergeordnete Rolle. Dies gilt jedoch nicht an überströmten Wänden. Dort haftet das Fluid. Im Fall großer Reynolds-Zahlen steigt die Geschwindigkeit sehr schnell von Null an der Wand auf die volle Geschwindigkeit in der Umgebung. Diese starke räumliche Änderung der Geschwindigkeit führt dazu, dass Reibungsspannungen in Wandnähe groß und Zähigkeitskräfte nicht mehr klein gegen Trägheitskräfte sind. An überströmten Oberflächen gibt es eine dünne Schicht, in der Zähigkeit grundsätzlich wichtig ist. Die dünne Schicht bezeichnet man als

Grenzschicht oder Reibungsschicht (*boundary layer*)

Dünne wandnahe Schicht im Strömungsfeld, in der sich die Geschwindigkeit von der Wandgeschwindigkeit auf die volle Außengeschwindigkeit ändert.

Erste Beispiele für Grenzschichten haben wir bereits bei der Einlaufströmung in ein Rohr (Kapitel 1.4.1) und im Fall der ruckartig beschleunigten Platte (Kapitel 4.4) kennengelernt. Im Folgenden betrachten wir die Grenzschicht an einem umströmten Körper. Als Beispiel dient in Abbildung 7.1 die ebene Strömung um ein Flügelprofil. Zur Beschreibung der Grenzschicht verwenden wir Grenzschichtkoordinaten: die y -Achse zeigt in wandnormale Richtung, als x -Koordinate verwenden wir die Bogenlänge entlang der Wand. So lange die Grenzschichtdicke klein gegen den Krümmungsradius der Wand bleibt, kann letztere lokal als eben angesehen werden. Die x -Achse ist dann lokal tangential zur Wand.

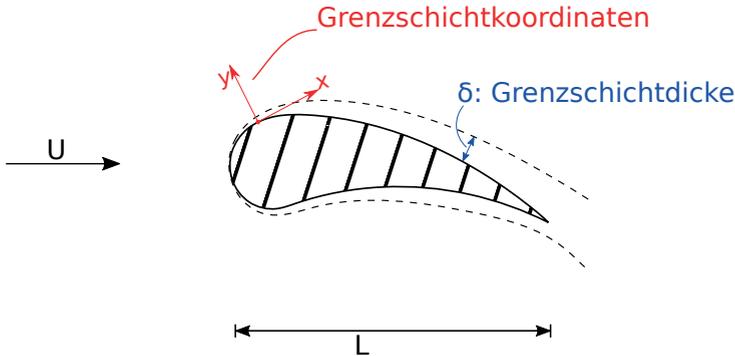


Abbildung 7.1: Grenzschicht und Grenzschichtkoordinaten an einem Flügelprofil.

Eine erste Abschätzung für die Dicke δ der Grenzschicht erhält man, indem man Trägheitskräfte mit Reibungskräften in der Grenzschicht vergleicht. Dabei ist das Längenmaß für Änderungen der Geschwindigkeit in x -Richtung die charakteristische Länge L des umströmten Körpers (vgl. Kapitel 4.3.1). Für Änderungen in wandnormaler Richtung ist dagegen die Grenzschichtdicke δ maßgebend, da sich über diese kleine Länge die Geschwindigkeit von Null an der Wand auf die Außengeschwindigkeit erhöht. Wir erhalten:

- Trägheitskraft (pro Volumen) $\sim \rho \frac{U^2}{L}$,
- Reibungskraft (pro Volumen) $\sim \mu \frac{U}{\delta^2}$.

Nimmt man als Wert für die Grenzschichtdicke den Wert, bei dem Trägheits- und Reibungskräfte von gleicher Größenordnung sind, so erhält man:

$$\delta \sim \sqrt{\nu \frac{L}{U}} \quad (7.1)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta}{L} \sim \sqrt{\frac{\nu}{LU}} = \frac{1}{\sqrt{Re}} \quad \text{mit } Re = \frac{UL}{\nu}. \quad (7.2)$$

Die Grenzschichtdicke ist folglich bei großen Reynolds-Zahlen klein gegen die charakteristische Länge L . Die Geschwindigkeit in der Grenzschicht nähert sich mit wachsendem Wandabstand der Außengeschwindigkeit asymptotisch, vgl. Abbildung 7.2. Bei bekanntem Geschwindigkeitsprofil stellt sich daher die Frage nach einer genauen Definition der Grenzschichtdicke (*boundary layer thickness*) δ . Es gibt verschiedene Definitionen:

Grenzschichtdicke δ_{99} : Wandabstand, an dem die Geschwindigkeit 99% der Außengeschwindigkeit u_∞ erreicht: $u(\delta_{99}) = 0,99 u_\infty$
 Achtung: diese Definition ist mit Willkür behaftet, man könnte genauso gut eine andere Prozentzahl wählen.

Verdrängungsdicke δ_1 oder δ^* : (*displacement thickness*) In der Grenzschicht ist der Massenstrom aufgrund der geringeren Geschwindigkeit kleiner als er in reibungsfreier Strömung wäre. Die Grenzschicht hat eine Verdrängungswirkung. Die Verdrängungsdicke ist der Betrag, um den die Wand nach außen verschoben werden müsste, um in reibungsfreier Strömung die gleiche Verdrängung wie in reibungsbehafteter Strömung zu erzielen. In inkompressiblen Strömungen ist das der Fall, wenn die in Abbildung 7.3 schraffierten Flächen gleich groß sind:

$$u_\infty \delta_1 = \int_0^\infty (u_\infty - u) dy, \quad (7.3)$$

$$\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) dy. \quad (7.4)$$

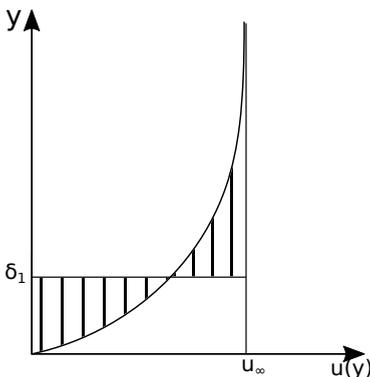


Abbildung 7.3: Verdrängungsdicke δ_1 .

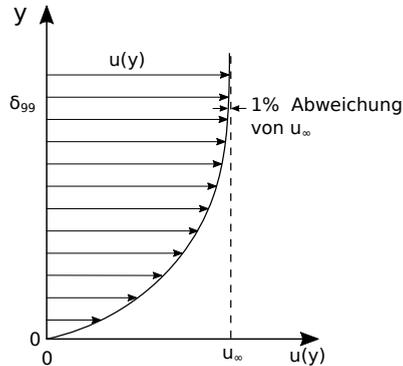


Abbildung 7.2: Grenzschichtprofil mit Grenzschichtdicke δ_{99} .

Impulsverlustdicke δ_2 : (*momentum thickness*) Auch der Impulsfluss ist in der Grenzschicht kleiner als in reibungsfreier Strömung. Die Definition der Impulsverlustdicke erfolgt analog zur Verdrängungsdicke:

$$\rho u_\infty^2 \delta_2 = \rho \int_0^\infty u(u_\infty - u) dy, \quad (7.5)$$

$$\delta_2 = \int_0^\infty \frac{u}{u_\infty} \left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) dy. \quad (7.6)$$

7.2 Prandtl'sche Grenzschichtgleichungen

An überströmten Oberflächen kann die Haftbedingung nur erfüllt werden, wenn der Zähigkeitsterm in der Navier-Stokes-Gleichung berücksichtigt wird (vgl. Kapitel 4.1.3). Dies führt gewöhnlich auf unüberwindbare Schwierigkeiten, wenn man die Navier-Stokes-Gleichung analytisch lösen möchte. Im Fall großer Reynolds-Zahlen besteht ein Ausweg darin, in der dann dünnen Grenzschicht Zähigkeitseffekte näherungsweise zu berücksichtigen und die Strömung außerhalb der Schicht als reibungsfrei zu betrachten. Diese Unterteilung der Strömung in eine reibungsfreie Außenströmung und eine reibungsbehaftete in der Grenzschicht hat Ludwig Prandtl (1885-1952) 1904 eingeführt. Er war damals gerade als Professor für technische Physik an die Universität Göttingen berufen worden. Der Prandtl'sche Ansatz erlaubte erstmals bis dahin ungeklärte Phänomene wie die Entstehung von Widerstand zu beschreiben. Seitdem ist Göttingen in der Strömungsmechanik weltweit bekannt.

Wie wir bereits im letzten Abschnitt gesehen haben, ist für die Reibungskraft in der Grenzschicht vor allem die Änderung der Geschwindigkeit senkrecht zur Wand wichtig. Wir werden nun die Größenordnungen aller Terme der Navier-Stokes-Gleichung in der Grenzschicht abschätzen und miteinander vergleichen. Hierbei beschränken wir uns auf stationäre ebene Strömungen. Weiterhin ist die Dichte konstant. Die Gleichungen schreiben wir in Grenzschichtkoordinaten, d.h., die x -Richtung verläuft tangential und die y -Richtung normal zur Wand, vgl. Abbildung 7.1:

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (7.7)$$

Navier-Stokes-Gleichungen für die x - und y -Richtung:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (7.8)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (7.9)$$

Aus der Kontinuitätsgleichung 7.7 folgt, dass $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial v}{\partial y}$ betragsmäßig von gleicher Größenordnung sind:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (7.10)$$

Im Fall großer Reynolds-Zahlen ist die Grenzschichtdicke klein gegen die charakteristische Länge der Strömung, $\delta \ll L$ (Gleichung (7.2)). Es ist:

- L : charakteristische Länge für Änderungen in x -Richtung,
- δ : Grenzschichtdicke, charakteristisch für Änderungen in y -Richtung.

Mit Gleichung (7.10) und da die Größenordnung der x -Komponente der Geschwindigkeit u von der Größe der charakteristischen Geschwindigkeit U ist, $u = \mathcal{O}(U)$, folgt:

$$\frac{U}{L} \sim \frac{v}{\delta} \quad (7.11)$$

$$\Rightarrow v \sim \frac{\delta}{L} U \ll u. \quad (7.12)$$

Dies verwenden wir, um die Größenordnungen der einzelnen Terme in Gleichung (7.8) abzuschätzen:

$$\begin{aligned} \underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x}} + \underbrace{v \frac{\partial u}{\partial y}} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} \right) \quad (7.13) \\ \sim \frac{U^2}{L} &\sim \underbrace{\frac{\delta}{L} U \frac{U}{\delta}}_{\sim U^2/L} && \sim \nu \frac{U}{L^2} \ll \sim \nu \frac{U}{\delta^2}. \end{aligned}$$

Der erste Summand des Zähigkeitsterms ist viel kleiner als der zweite und kann daher vernachlässigt werden. Der noch unbestimmte Druckterm ist in stationärer Strömung (Gleichgewicht) maximal von der Größe der konvektiven Beschleunigung. Damit folgt wieder (vgl. Gleichung (7.1)):

$$\frac{U^2}{L} \sim \nu \frac{U}{\delta^2} \quad (7.14)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\delta}{L} \sim \sqrt{\frac{\nu}{LU}} = \frac{1}{\sqrt{Re}}} \quad \text{mit} \quad Re = \frac{UL}{\nu}. \quad (7.15)$$

Für große Reynolds-Zahlen ist automatisch $\delta \ll L$. Die Abschätzung der Terme in Gleichung (7.9) für die y -Richtung, wieder mit $v \sim \frac{\delta}{L} U$ liefert:

$$\begin{aligned} \underbrace{u \frac{\partial v}{\partial x}} + \underbrace{v \frac{\partial v}{\partial y}} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}} + \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}} \right) \quad (7.16) \\ \sim \frac{U^2 \delta}{L^2} &\sim \frac{U^2 \delta}{L^2} && \sim \nu \frac{U \delta}{L^3} \ll \sim \nu \frac{U}{L \delta}. \end{aligned}$$

Es folgt wieder:

$$\frac{U^2 \delta}{L^2} \sim \nu \frac{U}{L \delta}. \quad (7.17)$$

Außerdem ist der Druckterm wieder maximal von der Größenordnung der konvektiven Beschleunigung:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \sim \frac{U^2 \delta}{L^2} \sim \frac{U^2}{L} \frac{1}{\sqrt{Re}}. \quad (7.18)$$

Im Grenzfall $Re \rightarrow \infty$ gilt somit:

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial y} = 0.} \quad (7.19)$$

Bei hohen Reynolds-Zahlen ändert sich der Druck in der Grenzschicht nicht normal zur Wand, er entspricht dem Druck in der reibungsfreien Außenströmung am Grenzschichtrand. In der Grenzschicht ist der Druck eine allein durch die Außenströmung vorgegebene Funktion von x , $p = p(x)$. Man sagt:

In Grenzschichten wird der Druck „von außen aufgeprägt“.

Die Strömung in der Grenzschicht wird durch die Kontinuitätsgleichung und die Navier-Stokes-Gleichung für die x -Richtung unter Vernachlässigung der zweiten Geschwindigkeitsableitung nach x beschrieben. Diese Gleichungen sind bekannt als

Prandtl'sche Grenzschichtgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (7.20)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (7.21)$$

Randbedingungen werden an der Wand und am Grenzschichtrand ($y = \delta$) vorgegeben:

$$y = 0 : \quad u = 0, \quad v = 0, \quad (7.22)$$

$$y \rightarrow \delta : \quad u = u_\infty(x). \quad (7.23)$$

wobei u_∞ die Geschwindigkeit in der reibungsfreien Außenströmung am Grenzschichtrand ist. Den Druckterm in der Grenzschichtgleichung für die wandtangentele Richtung können wir auch mittels Bernoulli-Gleichung über die Geschwindigkeit am Grenzschichtrand ausdrücken:

$$p + \frac{\rho}{2} u_\infty^2 = \text{const.} \quad (7.24)$$

Ableiten der Bernoulli-Gleichung nach x liefert:

$$\frac{dp}{dx} + \rho u_\infty \frac{du_\infty}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = u_\infty \frac{du_\infty}{dx}. \quad (7.25)$$

Die Prandtl'schen Grenzschichtgleichungen sind nach wie vor nichtlinear und von zweiter Ordnung. Aber es handelt sich nur noch um zwei Gleichungen für die beiden Geschwindigkeitskomponenten u und v . Der Druck wird durch die Außenströmung vorgegeben. Für die Grenzschichtgleichungen gibt es sowohl analytische als auch Näherungslösungen.

7.3 Plattengrenzschicht nach Blasius

Die möglicherweise bekannteste Lösung der Grenzschichtgleichungen ist die für die halbunendliche ebene Platte in Parallelanströmung. Die Lösung hat Heinrich Blasius (1883-1970) in seiner Dissertation an der Universität Göttingen (1907) abgeleitet. Hier skizzieren wir den Lösungsweg und das Ergebnis.

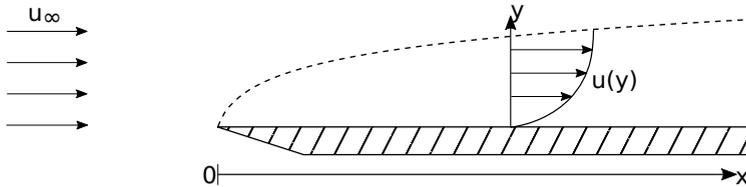


Abbildung 7.4: Plattengrenzschicht.

Abbildung 7.4 zeigt die Anordnung der Platte und das Strömungsfeld. Die Platte wird tangential zur Plattenoberseite mit konstanter Geschwindigkeit angeströmt. Für die Rechnung wird die Platte als unendlich dünn angenommen. Im Experiment verwendet man eine Platte, die vorn wie in Abbildung 7.3 spitz zuläuft. Der Ursprung des Koordinatensystems liegt an der Vorderkante der Platte. Die reibungsfreie Strömung außerhalb der Grenzschicht ist überall bekannt:

$$u = u_\infty = \text{const}, \quad (7.26)$$

$$p = p_\infty = \text{const}. \quad (7.27)$$

Aus der letzten Gleichung folgt, dass der Druckgradient verschwindet, $dp/dx = 0$. Die Grenzschichtgleichung für den Impuls in x -Richtung vereinfacht sich zu:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (7.28)$$

Die Randbedingungen für die Grenzschichtgleichungen lauten:

$$y = 0 : \quad u = 0, \quad v = 0, \quad (7.29)$$

$$y \rightarrow \delta : \quad u = u_\infty. \quad (7.30)$$

Es gibt keine charakteristische Länge (vergleiche ruckartig beschleunigte Platte, Kapitel 4.4). Wir machen daher den Ansatz, dass die Geschwindigkeitsprofile in

der Grenzschicht an verschiedenen Orten x entlang der Platte zueinander ähnlich sind, d.h.

$$\frac{u(x)}{u_\infty} = f(\eta), \quad \eta \sim \frac{y}{\delta(x)}. \quad (7.31)$$

In diesem Ansatz lassen wir zu, dass die Grenzschichtdicke eine Funktion des Abstandes x von der Plattenvorderkante ist. Für Fälle, in denen eine charakteristische Länge L existiert, hatten wir

$$\frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}. \quad (7.32)$$

Hier machen wir den Ansatz $L = x$ und erhalten

$$\delta(x) \sim \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}. \quad (7.33)$$

Der Quotient x/u_∞ entspricht gerade der Zeit, die ein Fluidteilchen in der reibungsfreien Außenströmung benötigt, um von der Plattenvorderkante bis zum Ort x zu gelangen. Dies ist vergleichbar mit dem Ergebnis aus der Lösung für die ruckartig beschleunigte Platte. Dort nahm die Breite δ der von der Plattenbewegung erfassten Schicht proportional zu \sqrt{vt} zu (vgl. Gleichung (4.159)). Für die dimensionslose Ähnlichkeitsvariable η in Gleichung (7.31) machen wir daher den Ansatz:

$$\eta := y \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \sim \frac{y}{\delta(x)}. \quad (7.34)$$

Den weiteren Lösungsweg skizzieren wir hier nur in Kürze. Die Strömung ist zweidimensional und inkompressibel. Daher lässt sich in den Grenzschichtgleichungen die Kontinuitätsgleichung durch Einführen einer Stromfunktion ψ erfüllen:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (7.35)$$

Integration der ersten Beziehung für u über y liefert:

$$\psi = \int_0^y u \, dy' = u_\infty \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} \int_0^\eta \frac{u}{u_\infty} \, d\eta' = \sqrt{\nu x u_\infty} \cdot F(\eta). \quad (7.36)$$

$F(\eta)$ ist die dimensionslose Stromfunktion. Damit erhält man:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \sqrt{\nu x u_\infty} F'(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} = u_\infty F'(\eta), \quad (7.37)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu u_\infty}{x}} [\eta F'(\eta) - F(\eta)]. \quad (7.38)$$

Dies eingesetzt in die Grenzschichtgleichung für den Impuls, Gleichung (7.28), ergibt eine gewöhnliche Differentialgleichung dritter Ordnung für die dimensionslose Stromfunktion F :

$$FF'' + 2F''' = 0, \quad (7.39)$$

mit den Randbedingungen:

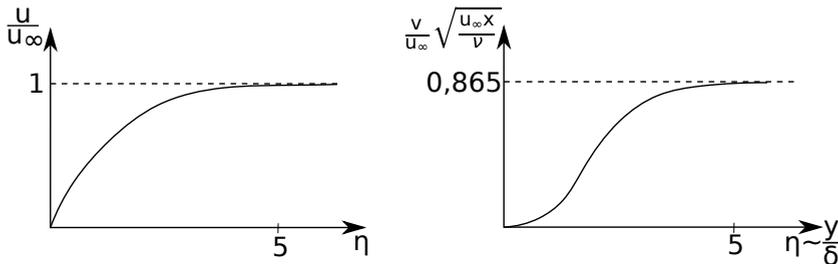
$$\eta = 0 : \quad F = F' = 0, \quad (7.40)$$

$$\eta \rightarrow \infty : \quad F' = 1. \quad (7.41)$$

Blasius hat diese Gleichung über Potenzreihenentwicklungen gelöst. Die Lösungen für die Geschwindigkeitskomponenten u und v sind in Abbildung 7.5 skizziert. Die wandparallele Komponente nähert sich asymptotisch der Anströmgeschwindigkeit. Die Grenzschichtdicke δ_{99} wird bei $\eta \approx 5$ erreicht. Mit dem Ansatz 7.34 für η folgt

$$\delta_{99} \approx 5 \cdot \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} \propto \sqrt{x}, \quad (7.42)$$

die Grenzschichtdicke nimmt proportional zur Wurzel der Lauflänge x zu. Auch die wandnormale Komponente nähert sich asymptotisch einem endlichen Wert größer Null an. Dies liegt an der Verdrängungswirkung der Grenzschicht.



(a) Annäherung an die Außengeschwindigkeit mit steigendem η .

(b) Annäherung an die Außengeschwindigkeit mit steigendem η , skizziert.

Abbildung 7.5: Geschwindigkeit in der Plattengrenzschicht.

Aus dem bekannten Verlauf der Geschwindigkeit kann die Wandschubspannung τ_w berechnet werden:

$$\tau_w(x) = \mu \left. \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0}. \quad (7.43)$$

Den Beitrag der Platte von der Vorderkante bis zum Ort x zum Reibungswiderstand W erhält man durch Integration der Wandschubspannung:

$$W = b \int_0^x \tau_w dx', \quad b: \text{Breite der Platte.} \quad (7.44)$$

$$c_W = \frac{W}{\frac{\rho}{2} u_\infty^2 \underbrace{b \cdot x}_{\text{Fläche bis } x}} \propto \frac{1}{\sqrt{Re}} = \frac{1}{\sqrt{x u_\infty / \nu}} \quad (7.45)$$

$$\Rightarrow \boxed{W \propto u_\infty^{3/2}}. \quad (7.46)$$

Der Widerstand wächst stärker mit der Geschwindigkeit als im Fall schleichender Strömungen, wo er der Geschwindigkeit proportional ist.

7.4 Grenzschichtablösung

Die im letzten Abschnitt behandelte Plattengrenzschicht ist ein Sonderfall, da dort der statische Druck in der Außenströmung überall konstant ist. Bei der Umströmung eines Körpers ist dies nicht mehr der Fall. Dies hat einen wesentlichen Einfluss auf das Verhalten der Grenzschicht. Im Folgenden betrachten wir dies wieder für stationäre Strömungen.

Betrachten wir zunächst den Druckverlauf an einer Körperoberfläche bei reibungsfreier Strömung (dieser Druck wird der Grenzschicht aufgeprägt). Am vorderen und hinteren Staupunkt stellt sich der Gesamtdruck ein, siehe Abbildung 7.6a. Bei der Umströmung des Körpers kommt es zunächst im Bereich zunehmenden Körperquerschnitts aufgrund der Verdrängungswirkung zu einer Beschleunigung der Strömung. Nach der Bernoulli-Gleichung (4.69) ist dies mit einem Druckabfall verbunden. Sobald der Körperquerschnitt wieder abnimmt, sinkt die Geschwindigkeit bis auf Null am hinteren Staupunkt. Dort wird wieder der Gesamtdruck erreicht.

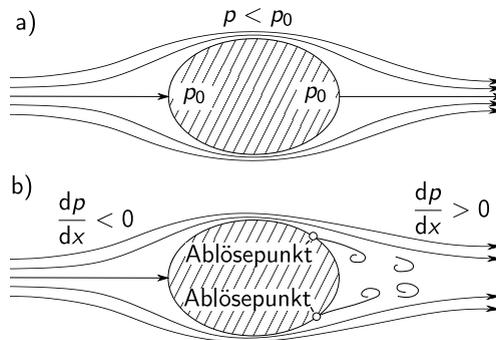


Abbildung 7.6: Körperumströmung: a) reibungsfrei, b) reibungsbehaftet, mit Ablösung.

In reibungsbehafteter Strömung bildet sich an der Körperoberfläche immer eine Grenzschicht aus. Dies führt dazu, dass der ideale Fall der reibungsfreien Um-

strömung in der Realität nicht erreicht wird. In der Grenzschicht wird das Fluid abgebremst, es verliert kinetische Energie (diese wird durch Dissipation in Wärme umgewandelt). Der Einfluss des Druckgradienten in der Außenströmung auf die Geschwindigkeit in der Grenzschicht ist dabei wie folgt:

- $\frac{dp}{dx} < 0$: Beschleunigung, wirkt der Abbremsung entgegen,
- $\frac{dp}{dx} > 0$: Verzögerung, unterstützt Abbremsung.

Auf der Rückseite des Körpers, wo der Druck wieder ansteigt, genügt die aufgrund von Dissipation reduzierte kinetische Energie in der Grenzschicht nicht mehr, um gegen den positiven Druckgradienten anzuströmen. Das Fluid wird langsamer und weicht seitlich aus. Die Grenzschicht löst vom Körper ab, siehe Abbildung 7.6b (*boundary layer separation*). Direkt an der Wand verursacht der positive Druckgradient eine Rückströmung, die dazu führt, dass sich Fluid ansammelt und die reibungsfreie Außenströmung weiter abgedrängt wird. Die Trennschicht zwischen Außenströmung und Grenzschicht rollt sich zu Wirbeln auf, die sich dann stromab bewegen. Hinter dem Körper bildet sich ein Nachlauf aus.

Der Verlauf von Stromlinien in der Umgebung der Ablösung und zugehörige Geschwindigkeitsprofile in der Grenzschicht sind in Abbildung 7.7 skizziert. Direkt am Ablösepunkt gilt:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad (7.47)$$

die Wandschubspannung verschwindet. Wenn Ablösung vorliegt, hat das Grenzschichtprofil immer einen Wendepunkt, da dann an der Wand und am Grenzschichttrand die Vorzeichen der zweiten Geschwindigkeitsableitungen verschieden sind:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y=0} > 0, \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y=\delta} < 0. \quad (7.48)$$

Aus der Grenzschichtgleichung für den Impuls,

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (7.49)$$

folgt daraus an der Wand wegen der Haftbedingung mit $u(x, y = 0) = 0$ und $v(x, y = 0) = 0$:

$$\boxed{\mu \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y=0} = \frac{dp}{dx}.} \quad (7.50)$$

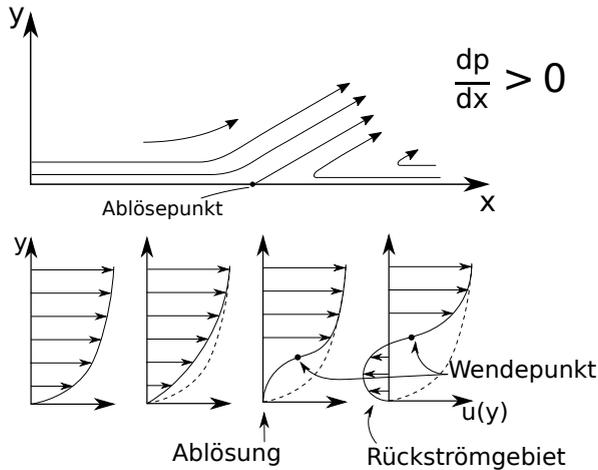


Abbildung 7.7: Grenzschichtablösung: Stromlinien (oben) und Geschwindigkeitsprofile (unten).

Damit entspricht das Vorzeichen der Krümmung des Grenzschichtprofils an der Wand dem des Druckgradienten:

$$\frac{dp}{dx} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0 \quad (\text{kein Wendepunkt}), \quad (7.51)$$

$$\frac{dp}{dx} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0 \quad (\text{Wendepunkt}). \quad (7.52)$$

Der Druckgradient spielt für Grenzschichtablösung eine wichtige Rolle. Nur falls $\frac{dp}{dx} > 0$, hat das Geschwindigkeitsprofil $u(y)$ einen Wendepunkt, die Grenzschicht neigt zur Ablösung. Bei beschleunigter Außenströmung ($\frac{dp}{dx} < 0$) findet keine Ablösung statt.

7.5 Instabilität der Plattengrenzschicht

Bisher haben wir laminare Grenzschichten betrachtet. Grenzschichten werden jedoch gewöhnlich turbulent, wenn die mit der Grenzschichtdicke gebildete Reynolds-Zahl einen kritischen Wert überschreitet. Einen verwandten Fall haben wir bereits mit der Rohrströmung kennengelernt (vgl. Kapitel 1.4). Auch dort wird die Strömung turbulent, sobald die mit dem Rohrdurchmesser gebildete Reynolds-Zahl über einem (hier anderen) kritischen Wert liegt. Der Rohrradius entspricht hier quasi der Grenzschichtdicke. Ein Vergleich der kritischen Reynolds-Zahlenwerte für die Plattengrenzschicht und Rohrströmung zeigt, dass diese von gleicher Größenordnung sind.

Bei der laminaren Plattengrenzschicht nach Blasius wächst die Grenzschichtdicke, und damit die mit dieser gebildete Reynolds-Zahl, proportional zur Wurzel aus dem Abstand von der Plattenvorderkante. Ab einem kritischen Ort stromab der Vorderkante übersteigt daher die Reynolds-Zahl den kritischen Wert, von da an ist die Grenzschicht turbulent. Gleichzeitig gilt aus theoretischer Sicht weiterhin die Blasius'sche Grenzschichtlösung für alle Abstände von der Plattenvorderkante. In ähnlicher Weise gilt auch die Lösung für die laminare Rohrströmung mit parabolischem Geschwindigkeitsprofil für alle Reynolds-Zahlen. Die laminare Strömung wird jedoch instabil und eine andere Strömungsform entsteht.

Instabilitäten sind in vielen Bereichen der Strömungsmechanik wichtig. Kleine Störungen, die sich nie ganz vermeiden lassen, können angefacht werden. Zähigkeit dämpft dagegen Störungen. Daher spielt die Reynolds-Zahl oft eine wichtige Rolle. Nicht jede Instabilität führt zur Turbulenz. Es können auch neue laminare Strömungsformen entstehen. Im Folgenden untersuchen wir die Stabilität der Plattengrenzschicht mittels linearer Stabilitätsanalyse.

Bei der linearen Stabilitätsanalyse wird einer stationären, laminaren Grundströmung, $\vec{u}_G(x, y, z)$ und $p_G(x, y, z)$, eine instationäre kleine Störung, $\vec{u}'(x, y, z, t)$ und $p'(x, y, z, t)$, überlagert:

$$\begin{aligned}\vec{u}(x, y, z, t) &= \vec{u}_G(x, y, z) + \vec{u}'(x, y, z, t), \\ p(x, y, z, t) &= p_G(x, y, z) + p'(x, y, z, t).\end{aligned}\tag{7.53}$$

Die Navier-Stokes- und Kontinuitätsgleichung für die stationäre Grundströmung lauten:

$$\begin{aligned}(\vec{u}_G \nabla) \vec{u}_G &= -\frac{1}{\rho} \nabla p_G + \nu \Delta \vec{u}_G, \\ \nabla \vec{u}_G &= 0.\end{aligned}\tag{7.54}$$

Für die gestörte Strömung gilt mit \vec{u} und p nach Gleichung (7.53):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \nabla) \vec{u} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{u}, \\ \nabla \vec{u} &= 0.\end{aligned}\tag{7.55}$$

Zieht man Gleichung (7.54) von Gleichung (7.55) ab und linearisiert, so erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} + (\vec{u}_G \nabla) \vec{u}' + (\vec{u}' \nabla) \vec{u}_G &= -\frac{1}{\rho} \nabla p' + \nu \Delta \vec{u}', \\ \nabla \vec{u}' &= 0.\end{aligned}\tag{7.56}$$

Dies ist ein System linearer Gleichungen für die unbekanntenen Störungen, mit der Randbedingung, dass die Störungen der Geschwindigkeit an festen Wänden verschwinden (Haftbedingung).

Bis hierher war die Vorgehensweise allgemein. Nun betrachten wir speziell die Plattengrenzschicht. Die Stabilität dieser Grenzschicht wurde von Walter Tollmien (1900 – 1968), einem Schüler Prandtls und später sein Nachfolger an der Göttinger Fakultät für Physik, erfolgreich untersucht. Im Folgenden wird der Lösungsweg skizziert. Für die Grundströmung in der Grenzschicht macht man den Ansatz:

$$u_G = u_G(y), \quad v_G = 0, \quad w_G = 0, \quad (7.57)$$

wobei die x -Komponente der Geschwindigkeit allein als Funktion von y angesetzt wird, da der Einfluss von y deutlich größer ist als der von x . Die betragsmäßig kleine Geschwindigkeitskomponente v_G in der Grenzschichtströmung wird ebenso vernachlässigt. Weiterhin gehen wir, wie in Kapitel 7.3, auch hier von einer ebenen Strömung aus und lassen Störbewegungen in z -Richtung (w') außer Acht. Es kann gezeigt werden, dass diese Vernachlässigungen im Fall der Plattengrenzschicht keinen Einfluss auf das Ergebnis der Stabilitätsrechnung haben. Mit diesem Ansatz bleiben von der linearisierten Navier-Stokes-Gleichung nur die Gleichungen für die x - und y -Richtung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + u_G \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial u_G}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \Delta u', \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + u_G \frac{\partial v'}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} + \nu \Delta v'. \end{aligned} \quad (7.58)$$

Als Nächstes wird der Druck aus den beiden Bewegungsgleichungen (7.58) durch kreuzweises Differenzieren nach y und x und anschließender Differenzbildung eliminiert (vgl. die Vorgehensweise in Kapitel 4.5). Man erhält eine Differentialgleichung dritter Ordnung für u' und v' . Da hier eine ebene Strömung vorliegt, wird die Kontinuitätsgleichung durch Einführen der Stromfunktion ψ erfüllt:

$$u' = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v' = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (7.59)$$

Ersetzt man auf diese Weise die Störgeschwindigkeiten, so erhält man eine partielle Differentialgleichung vierter Ordnung für die Stromfunktion.

Beliebige Störungen können über eine Fourierreihenentwicklung dargestellt werden. Als Ansatz für die die Störungen repräsentierende Stromfunktion werden daher hier in x -Richtung laufende Wellen gewählt:

$$\boxed{\psi(x, y, t) = \varphi(y) \exp[i(\alpha x - \beta t)] = \varphi(y) \exp[i\alpha(x - ct)]} \quad (7.60)$$

mit:

- $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}$: Wellenzahl, mit λ : Wellenlänge,

- $\beta = \beta_r + i\beta_i \in \mathbb{C}$:
mit Realteil β_r : Kreisfrequenz,
Imaginärteil β_i : Anfachungsrate ($\beta_i > 0$: Anfachung, $\beta_i < 0$: Dämpfung),
- $c = \beta\alpha = c_r + ic_i \in \mathbb{C}$:
mit Realteil c_r : Phasengeschwindigkeit,
Imaginärteil c_i : Anfachungsrate ($c_i > 0$: Anfachung, $c_i < 0$: Dämpfung),
- $\varphi(y)$ Amplitudenfunktion.

Mit diesem Ansatz wird die partielle Differentialgleichung vierter Ordnung für die Stromfunktion zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung vierter Ordnung für die Amplitudenfunktion φ . Nach Entdimensionalisierung mit der Anströmgeschwindigkeit u_∞ und der Grenzschichtdicke δ erhält man die

Orr-Sommerfeld-Gleichung

$$(u_G - c)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - u_G'' = -\frac{i}{\alpha Re} (\varphi'''' - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi), \quad (7.61)$$

wobei $Re = u_\infty\delta/\nu$. Die Randbedingungen für φ lauten:

$$\varphi = 0, \quad \varphi' = 0 \quad \text{für } y = 0 \text{ und } y \rightarrow \infty. \quad (7.62)$$

Für die Plattengrenzschicht ist mit vorgegebener Anströmgeschwindigkeit u_∞ in der Orr-Sommerfeld-Gleichung die Grundströmung $u_G(y)$ und damit auch die Reynolds-Zahl $Re = u_\infty\delta/\nu$ bekannt. Für jede Kombination aus Reynolds-Zahl und Wellenzahl α stellt die Orr-Sommerfeld-Gleichung damit ein Eigenwertproblem dar, mit $\varphi(y)$ als Eigenfunktion und $c = c_r + ic_i$ als komplexem Eigenwert. Dieses Eigenwertproblem ist von Tollmien gelöst worden. Für die Stabilität entscheidend ist das Vorzeichen des Imaginärteils c_i der komplexen Phasengeschwindigkeit, vgl. Gleichung (7.60). Für $c_i > 0$ wird die Störung der Wellenzahl α angefacht, für $c_i < 0$ gedämpft. In Abbildung 7.8 sind Bereiche mit positivem und negativem c_i in Abhängigkeit von der mit der Grenzschichtdicke skalierten Wellenzahl, $\alpha \cdot \delta$, und der Reynolds-Zahl $Re = u_\infty\delta/\nu$ aufgetragen. Die beiden Bereiche werden von der Indifferenzkurve ($c_i = 0$) getrennt. Abbildung 7.8 zeigt, dass unterhalb einer Indifferenz-Reynolds-Zahl $Re_{\text{ind}} = u_\infty\delta(x_{\text{ind}})/\nu$ Störungen aller Wellenzahlen (und damit Wellenlängen) gedämpft werden. Die Grenzschichtdicke steigt proportional mit der Wurzel des Abstandes x vom Plattenanfang. Der Wert Re_{ind} wird daher am **Indifferenzpunkt** x_{ind} erreicht. Stromauf vom Indifferenzpunkt ist die laminare Grenzschicht immer stabil. Stromab des Indifferenzpunktes ist $Re > Re_{\text{ind}}$ und es gibt einen Wellenzahlbereich, für den Störungen angefacht werden, die Grenzschicht kann instabil werden. Störungen aus dem zugehörigen Wellenlängenbereich werden angefacht, Störungen mit größeren oder kleineren Wellenlängen werden gedämpft. Die angefachten Wellen

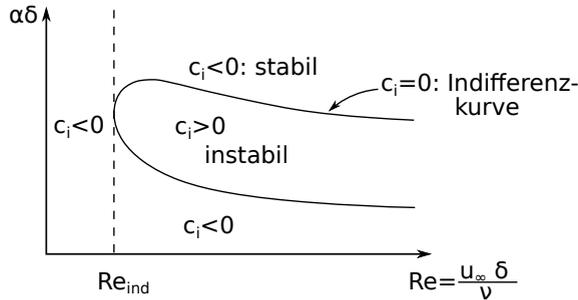


Abbildung 7.8: Plattengrenzschicht: Indifferenzkurve und Anfachungs- sowie Dämpfungsbereiche.

heißen **Tollmien-Schlichting-Wellen** (*Hermann Schlichting (1907-1982), u.a. Direktor der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen, hat die Tollmien'schen Rechnungen weiter geführt*). Beachte, durch die Tollmien-Schlichting-Wellen wird die laminare Plattengrenzschicht zwar verändert, aber nicht turbulent.

Die Ergebnisse dieser Stabilitätsanalyse wurden Anfang der 1940er Jahre durch ein berühmtes Experiment von Schubauer und Skramstad bestätigt. Ein innerhalb der Grenzschicht quer über die Platte gespanntes Metallband wurde dazu gezielt zu Schwingungen angeregt. Anfachung der so erzeugten Störungen erfolgte nur für $Re - \alpha$ Kombinationen, die im instabilen Bereich lagen. Andernfalls wurden die Störungen gedämpft.

Die angefachten Tollmien-Schlichting-Wellen wandern stromab. Dabei wächst ihre Amplitude. Die Störungen sind dann nicht mehr klein und der Geltungsbereich der linearen Analyse wird überschritten. Es treten neue Effekte auf. Aber erst nach einer genügend langen Lauflänge ist die Grenzschicht ab einem **Umschlagpunkt** x_{tr} voll turbulent. Dies geschieht bei einer kritischen Reynolds-Zahl $Re_{tr} = u_\infty \delta(x_{tr}) / \nu > Re_{ind}$. Dies ist in Abbildung 7.9 skizziert. Die genaue Definition des Umschlagpunktes ist mit Willkür behaftet, damit ebenso auch der Wert der kritischen Reynolds-Zahl Re_{tr} . Der Übergang (Transition) in die Turbulenz ist noch immer Gegenstand der Forschung.

In der turbulenten Grenzschicht sorgen Geschwindigkeitsschwankungen für einen Austausch von Fluid in wandnormaler Richtung. Langsames Fluid wird von der Wand weg in Richtung der Außenströmung getragen und, umgekehrt, schnelles Fluid in Richtung Wand transportiert. Dadurch steigt die mittlere Geschwindigkeit zunächst viel schneller an als in laminarer Strömung. Die Außengeschwindigkeit wird jedoch erst später erreicht und die Grenzschichtdicke wird deutlich größer als bei laminarer Strömung, vgl. Abbildung 7.9.

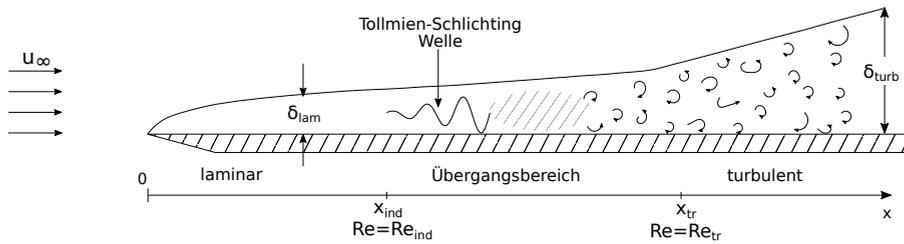


Abbildung 7.9: Übergang von laminarer zu turbulenter Grenzschicht.

Grenzschichtprofile und -dicken bei laminarer und turbulenter Grenzschicht werden in Abbildung 7.10 miteinander verglichen. Der bei turbulenter Grenzschicht an der Wand schnellere Anstieg der mittleren Geschwindigkeit $\bar{u}_t(y)$ führt dazu, dass die Wandschubspannung bei turbulenter Grenzschicht größer ist als bei laminarer:

$$\tau_{W,t} = \left. \frac{\partial \bar{u}_t}{\partial y} \right|_{y=0} > \left. \frac{\partial u_G}{\partial y} \right|_{y=0} = \tau_{W,l}. \quad (7.63)$$

Der Reibungswiderstand wird über die Wandschubspannung verursacht. Daher folgt:

Der turbulente Reibungswiderstand ist deutlich größer als der laminare.

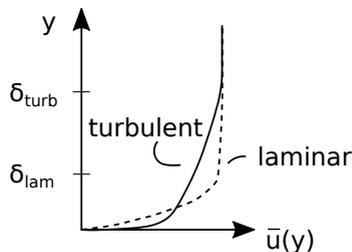


Abbildung 7.10: Plattengrenzschicht: laminares und turbulentes Geschwindigkeitsprofil.

Die Indifferenz-Reynoldszahl Re_{ind} ist das Ergebnis der linearen Stabilitätsrechnung und hat einen festen Wert. Der Wert der kritischen Reynoldszahl Re_{tr} für den Umschlag in die voll turbulente Grenzschicht hängt dagegen von kleinen turbulenten Störungen in der Anströmung ab. Als Maß für die Größe der

Störungen dient der

Turbulenzgrad Tu (*turbulence intensity*)

$$Tu := \sqrt{\frac{1}{3} \frac{\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}}{u_\infty^2}}. \quad (7.64)$$

Der Querstrich über den quadrierten Schwankungsgeschwindigkeiten bedeutet hier eine zeitliche Mittelung. Ist der Turbulenzgrad klein, so ist Re_{tr} viel größer als Re_{ind} und der Umschlagpunkt x_{tr} liegt wenigstens eine Größenordnung weiter von der Plattenvorderkante als der Indifferenzpunkt x_{ind} . Für große Turbulenzgrade nähert sich dagegen die kritische Reynolds-Zahl Re_{tr} für den Übergang zur turbulenten Grenzschicht der Reynolds-Zahl Re_{ind} des Indifferenzpunktes und der Umschlagpunkt rückt nach vorn.

7.6 Turbulente Grenzschicht und logarithmisches Wandgesetz

Laminare Grenzschichten werden gewöhnlich nach genügend langer Lauflänge turbulent. Im Folgenden betrachten wir ebene turbulente Grenzschichten, die im zeitlichen Mittel stationär sind. Der stationären Grundströmung sind turbulente Schwankungsbewegungen überlagert:

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \overline{\vec{u}(\vec{x})} + \vec{u}'(\vec{x}, t) \quad (7.65)$$

mit

$$\overline{\vec{u}(\vec{x})} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \vec{u}(\vec{x}, t) dt, \quad \overline{\vec{u}'(\vec{x}, t)} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \vec{u}'(\vec{x}, t) dt = 0. \quad (7.66)$$

Hierbei ist die Mittelungsdauer T so groß zu wählen, so dass der Mittelwert zeitunabhängig wird und somit Mittelwerte der Schwankungsgrößen verschwinden.

In der turbulenten Grenzschicht führen die Schwankungsbewegungen zu einem Impulsaustausch und damit zu Spannungen im Fluid. Dies geschieht analog zum gaskinetischen Impulstransport, der in Kapitel 1.2.1 betrachtet wurde. Während der gaskinetische Impulstransport durch thermische Schwankungsbewegungen einzelner Moleküle zustande kommt, handelt es sich in der turbulenten Grenzschicht um turbulente Schwankungsgeschwindigkeiten von Fluidteilchen.

Die Grenzschichtgleichungen enthalten für den Impuls nur die Gleichung für dessen wandparallele Komponente (vgl. Gleichung 5.21). In der turbulenten Grenzschicht interessiert daher der Fluss dieser Impulskomponente (pro Flächeneinheit), sowohl

parallel (x -Richtung) als auch senkrecht (y -Richtung) zur Wand. Der gemittelte Fluss in z -Richtung verschwindet in der ebenen Strömung und wird daher nicht weiter betrachtet. Im zeitlichen Mittel erhält man für den Fluss des Impulses ρu in x - und y -Richtung:

$$\rho \overline{u u} = \rho \overline{(\bar{u} + u')(\bar{u} + u')} = \rho \left(\bar{u} \bar{u} + \underbrace{\overline{\bar{u} u'}}_{=0} + \underbrace{\overline{u' \bar{u}}}_{=0} + \overline{u' u'} \right) = \rho (\bar{u} \bar{u} + \overline{u' u'}), \quad (7.67)$$

$$\rho \overline{u v} = \rho \overline{(\bar{u} + u')(\bar{v} + v')} = \rho \left(\bar{u} \bar{v} + \underbrace{\overline{\bar{u} v'}}_{=0} + \underbrace{\overline{u' \bar{v}}}_{=0} + \overline{u' v'} \right) = \rho (\bar{u} \bar{v} + \overline{u' v'}). \quad (7.68)$$

Die Mittelwerte aus Produkten aus einem Mittelwert und einer Schwankungsgröße verschwinden. Neben den Beiträgen der im Mittel stationären Strömung, $\rho \bar{u} \bar{u}$ und $\rho \bar{u} \bar{v}$, bleiben Mittelwerte aus Produkten von Schwankungsgrößen ($\rho \overline{u' u'}$, $\rho \overline{u' v'}$). Diese rufen zusätzliche Spannungen im Fluid hervor, die sogenannten **Reynolds-Spannungen** (*Reynolds stress*), die auch als **turbulente Scheinspannungen** bezeichnet werden. Die erste liefert einen Beitrag zur Normalspannung (Impulsfluss in x -Richtung), die andere eine zur Schubspannung (Impulsfluss in y -Richtung). Die Scheinspannungen verschwinden nicht. Für $\overline{u' u'} = u'^2$ sieht man das sofort. Dies gilt aber auch für $\overline{u' v'}$, denn in der Grenzschicht verursacht ein positives v' meist ein negatives u' und umgekehrt, siehe Abbildung 7.11.

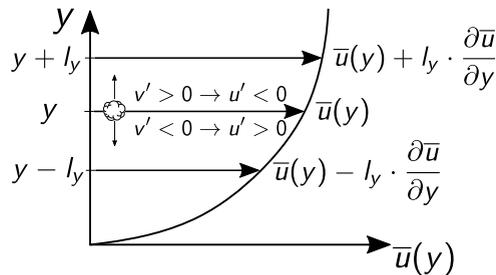


Abbildung 7.11: Zum Prandtl'schen Mischungswegansatz.

Die turbulenten Schein- oder Reynolds-Spannungen spielen eine wichtige Rolle in den Grenzschichtgleichungen für turbulente Grenzschichten. Um dies zu sehen, drücken wir in den Grenzschichtgleichungen (7.20) und (7.21),

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_\infty \frac{du_\infty}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

die Geschwindigkeiten u und v jeweils über die Summe aus zeitlichem Mittelwert und Schwankungsgröße aus. Mit $u = \bar{u} + u'$ und $v = \bar{v} + v'$ folgt:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0, \quad (7.69)$$

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + u' \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{v} \frac{\partial u'}{\partial y} + v' \frac{\partial u'}{\partial y} \\ = u_\infty \frac{du_\infty}{dy} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (7.70)$$

Führt man nun eine zeitliche Mittelung durch, so verschwinden die unterstrichenen Terme. Es bleibt:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0, \quad (7.71)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = u_\infty \frac{du_\infty}{dx} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \left(\overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{v' \frac{\partial u'}{\partial y}} \right). \quad (7.72)$$

Abgesehen vom letzten Ausdruck in der Klammer sind dies die Grenzschichtgleichungen für laminare Strömungen. Den Ausdruck mit den Schwankungsgeschwindigkeiten formen wir um. Dabei nutzen wir aus, dass

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0, \quad (7.73)$$

denn da nach Gleichung (7.71) bereits die Divergenz der gemittelten Geschwindigkeit verschwindet, gilt dies auch für die Schwankungen. Damit lässt sich der Klammerausdruck aus Gleichung (7.72) wie folgt umschreiben:

$$\left(\overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{v' \frac{\partial u'}{\partial y}} \right) = \left[\frac{1}{2} \frac{\partial u'^2}{\partial x} + \frac{\partial (u'v')}{\partial y} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} \right] = \left[\frac{\partial u'^2}{\partial x} + \frac{\partial u'v'}{\partial y} \right] \approx \frac{\partial u'v'}{\partial y}. \quad (7.74)$$

Die letzte Näherung beruht darauf, dass in der Grenzschicht Änderungen in x -Richtung viel kleiner sind als solche in wandnormaler Richtung:

$$\frac{\partial u'^2}{\partial x} \ll \frac{\partial u'v'}{\partial y}. \quad (7.75)$$

Für die zeitlich gemittelten Grenzschichtgleichungen erhalten wir auf diese Weise:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0, \quad (7.76)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = u_\infty \frac{du_\infty}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (7.77)$$

$$\text{mit } \tau := \tau_\mu + \tau_t = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'}. \quad (7.78)$$

In turbulenten Grenzschichten tritt zur Reibungsspannung $\tau_\mu = \mu d\bar{u}/dy$ noch die turbulente Scheinspannung $\tau_t = \rho \overline{u'v'}$ hinzu. Formal sind die Grenzschichtgleichungen für laminare und turbulente Grenzschichten gleich. Jedoch ist im turbulenten Fall die Scheinspannung nicht bekannt. Anders als für den Newton'schen Reibungsansatz gibt es für die Reynolds-Spannungen keine allgemeingültige Darstellung, sie werden über Turbulenzmodelle approximiert. Es gibt inzwischen viele, teilweise hochkomplexe, Turbulenzmodelle.

Ein einfacher Ansatz nach Prandtl geht davon aus, dass sich turbulente Fluidballen über eine gewisse Länge fortbewegen, bevor sie ihre Individualität in der turbulenten Mischbewegung wieder verlieren. Ein Fluidballen, der sich in wandnormaler Richtung um eine solche Länge l_y bewegt, verursacht im neuen Wandabstand eine Änderung der mittleren Geschwindigkeit um $u' = \pm l_y \partial\bar{u}/\partial y$, je nachdem, ob der Ballen von größeren oder kleineren Abständen kommt, siehe Abbildung 7.11. Aus Kontinuitätsgründen ist die Größenordnung der Schwankungsgeschwindigkeit v' von gleicher Größenordnung, $v' \sim u'$. Damit wird die turbulente Schubspannung τ_t zu:

$$\tau_t = -\rho \overline{u'v'} = \rho l^2 \left| \frac{\partial\bar{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial\bar{u}}{\partial y}. \quad (7.79)$$

Dies ist der **Prandtl'sche Mischungswegansatz** (*mixing length theory*) für die turbulente Schubspannung. Im Mischungsweg l sind alle unbekanntenen Proportionalitätskonstanten zusammengefasst. Das Betragszeichen wird eingeführt, damit das Vorzeichen der turbulenten Schubspannung gleich dem der Ableitung $\partial\bar{u}/\partial y$ ist. Dies entspricht der Überlegung, dass ein positives u' im Allgemeinen von einem negativen v' verursacht wird und umgekehrt. Beachte: der Mischungsweg l ist unbekannt.

Der Mischungswegansatz erlaubt es, eine universelle Aussage über die Verteilung der mittleren Geschwindigkeit $\bar{u}(y)$ in turbulenten Grenzschichten abzuleiten. Dazu wird die Schubspannung zumindest in Wandnähe als konstant gleich der Wandschubspannung τ_w angenommen:

$$\tau_w = \mu \frac{\partial\bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} = \mu \frac{\partial\bar{u}}{\partial y} + \rho l^2 \left| \frac{\partial\bar{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial\bar{u}}{\partial y} = \text{const.} \quad (7.80)$$

Ein Beispiel, bei dem dies exakt erfüllt wird, ist die turbulente Couette-Strömung ohne Druckgradient. An beiden Wänden bilden sich Grenzschichten aus, der Geschwindigkeitsverlauf ist nicht mehr linear. Das Kräftegleichgewicht erfordert jedoch eine über die ganze Spaltbreite konstante Schubspannung, siehe Abbildung 7.12.

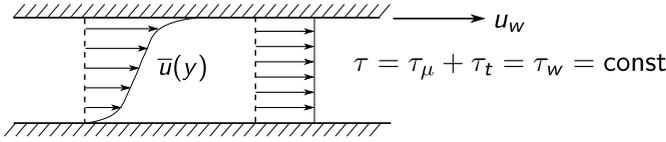


Abbildung 7.12: Turbulente Couette-Strömung.

Der Geschwindigkeitsverlauf $\bar{u}(y)$ ist hier nur eine Funktion von μ , ρ und τ_w . Aus diesen Größen lassen sich eine Geschwindigkeit und eine Länge bilden:

$$u_\tau := \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \quad y_\tau := \frac{\mu}{\rho} \frac{1}{u_\tau} = \frac{\nu}{u_\tau}. \quad (7.81)$$

Die aus Wandschubspannung und Dichte gebildete Geschwindigkeit wird **Schubspannungsgeschwindigkeit** u_τ (*friction velocity*) genannt. Für die dimensionslose Geschwindigkeit $\bar{u}^+ = \bar{u}(y)/u_\tau$ gilt mit $y^+ = y/y_\tau$:

$$\bar{u}^+ = f(y^+), \quad (7.82)$$

wobei f eine universelle Funktion des dimensionslosen Wandabstandes ist (vergleiche mit Π -Theorem, hier sind es fünf Variablen und drei Grundeinheiten).

An der Wand gilt die Haftbedingung. Dort verschwinden auch die turbulenten Schwankungen. In einer dünnen Schicht neben der Wand sind die Schwankungsgeschwindigkeiten zunächst so klein, dass die turbulente Scheinspannung gegenüber der reibungsbedingten Schubspannung vernachlässigt werden kann. In diesem Bereich, **zähe Unterschicht** (*viscous sublayer*) genannt, dominieren die Reibungsspannungen, es gilt dort näherungsweise:

$$\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \tau_w, \quad \text{dimensionslos: } \frac{\partial \bar{u}^+}{\partial y^+} = 1. \quad (7.83)$$

Integration, unter Beachtung von $\bar{u}(0) = 0$, liefert:

$$\bar{u}^+(y^+) = y^+. \quad (7.84)$$

In der zähen Unterschicht steigt die mittlere Geschwindigkeit linear mit dem Wandabstand. Beachte: auch in der zähen Unterschicht existieren (kleine) turbulente Schwankungen, die Strömung ist nicht laminar.

Direkt an der Wand verschwinden die turbulenten Scheinspannungen, mit steigendem Wandabstand nehmen sie dann zu und überwiegen rasch die Reibungsspannungen. Ein einfacher Ansatz für den Mischungsweg ist daher

$$l = \kappa y. \quad (7.85)$$

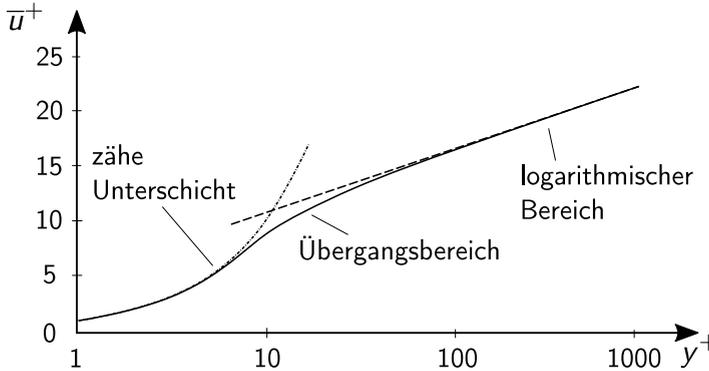


Abbildung 7.13: Universelles Geschwindigkeitsprofil in der turbulenten Grenzschicht.

Die Proportionalitätskonstante κ ist nach von Kármán benannt. Sobald die Reibungsspannungen vernachlässigbar sind, erhalten wir aus Gleichung (7.80) mit diesem Ansatz für den Mischungsweg:

$$\underbrace{\rho \kappa^2 y^2}_{=l^2} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial u}{\partial y} = \tau_w, \quad \text{dimensionslos: } \kappa^2 y^{+2} \left| \frac{\partial \bar{u}^+}{\partial y^+} \right| \frac{\partial \bar{u}^+}{\partial y^+} = 1. \quad (7.86)$$

Das Ergebnis der Integration ist bekannt als

Logarithmisches Wandgesetz (*logarithmic law of the wall*)

$$\bar{u}^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C^+. \quad (7.87)$$

Experimentell bestimmte Werte für die Integrationskonstanten C^+ und die von Kármán-Konstante κ sind $C^+ \approx 5$ und $\kappa \approx 0,4$. Die Geschwindigkeitsverteilung in der turbulenten Grenzschicht entsprechend der linearen Gleichung (7.84) und dem logarithmischen Verlauf (Gleichung (7.87)) ist in halb-logarithmischer Darstellung in Abbildung 7.13 aufgetragen. Zwischen den beiden Bereichen gibt es einen Übergangsbereich. Die einzelnen Bereiche liegen bei folgenden Wandabständen:

- zähe Unterschicht: $y^+ \lesssim 5, \quad (7.88)$

- Übergangsbereich: $5 \lesssim y^+ \lesssim 30, \quad (7.89)$

- logarithmischer Bereich: $y^+ \gtrsim 30. \quad (7.90)$

7.7 Widerstand

In reibungsbehafteter Strömung wirkt auf einen umströmten Körper eine Kraft. Die Komponente dieser Kraft in Richtung der Anströmgeschwindigkeit ist der Widerstand (*drag*). Der Widerstand W hängt ab von der Geschwindigkeit u_∞ , der dynamischen Zähigkeit μ und der Dichte ρ des Fluids, sowie von einer für den Körper charakteristischen Länge L . Wirken keine zusätzlichen äußeren Kräfte, wie z.B. die Schwerkraft (vgl. Kapitel 4.3.3), lässt sich der Widerstandsbeiwert $c_w = W/(\rho/2 u_\infty^2 L^2)$ als Funktion der Reynolds-Zahl $Re = \rho u_\infty L/\mu$ darstellen (vgl. II- Theorem):

$$c_w = f(Re). \quad (7.91)$$

Zwei Beispiele haben wir bereits kennengelernt. Für die tangential überströmte Platte ist der Widerstandsbeiwert bei laminarer Strömung proportional zur Wurzel aus der reziproken Reynolds-Zahl (vgl. Blasius'sche Plattengrenzschicht, Gleichung (7.45)). Der Widerstand entsteht dabei allein durch Reibungsspannungen zwischen Grenzschicht und Plattenoberfläche. Beim Stokes'schen Widerstandsgesetz für Kugeln in schleichender Strömung lieferte die Lösung der Differentialgleichung schleichender Strömungen einen Widerstandsbeiwert, der proportional zur reziproken Reynolds-Zahl ist (Gleichung (4.188)). Hier setzt sich der Widerstand aus einem reibungs- und druckbedingten Anteil zusammen.

Die Abhängigkeit des Widerstandsbeiwertes von der Reynolds-Zahl bis hin zu großen Reynolds-Zahlen wird im Folgenden am Beispiel der Kugel diskutiert. Der Zusammenhang ist in Abbildung 7.14 aufgetragen. Für $Re = \rho u_\infty 2R/\mu \lesssim 1$ liefert das Stokes'sche Gesetz in der doppelt-logarithmischen Auftragung einen linearen Abfall des Widerstandsbeiwertes. Nach einem Übergangsbereich bleibt der Wider-

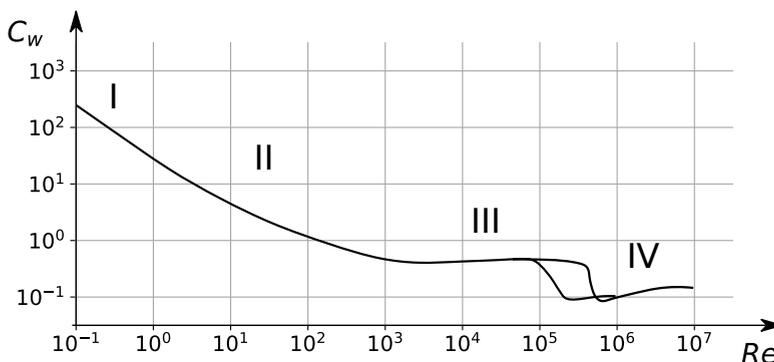


Abbildung 7.14: Widerstandsbeiwert einer Kugel als Funktion der Reynolds-Zahl.

standsbeiwert konstant, d.h., der Widerstand selbst nimmt mit dem Quadrat der Geschwindigkeit zu (bei sonst unveränderten Parametern). Der plötzliche Abfall bei $Re \approx 3 \cdot 10^5$ hängt mit dem Übergang von laminarer zu turbulenter Grenzschicht zusammen, siehe unten.

Bei größeren Reynolds-Zahlen, wenn die Strömung nicht mehr schleichend ist, bildet sich an der Kugeloberfläche eine dünne Grenzschicht aus. Der Druck in der Grenzschicht ist durch den in der reibungsfreien Außenströmung bestimmt. In reibungsfreier Strömung stellt sich am vorderen Staupunkt der Gesamtdruck ein. Dann nimmt der Druck bis zum Scheitelpunkt ($\theta = 90^\circ$) ab, um anschließend wieder bis auf den Gesamtdruck anzusteigen, vgl. Abbildung 7.15. Das Ganze geschieht symmetrisch zur Frontalebene bei $\theta = 90^\circ$. In der reibungsfreien Strömung entsteht kein Widerstand (vgl. d'Alembert'sches Paradoxon, Kapitel 5.2). In der reibungsbehafteten Strömung ist das anders. In der Grenzschicht wird das Fluid verzögert, kinetische Energie wird durch Dissipation in Wärme umgewandelt. Auf der Kugelrückseite genügt die reduzierte kinetische Energie nicht mehr, um gegen den ansteigenden Druck anzuströmen, es kommt zu einer Strömungsablösung. Je nach Reynolds-Zahl sind verschiedene Fälle zu unterscheiden.

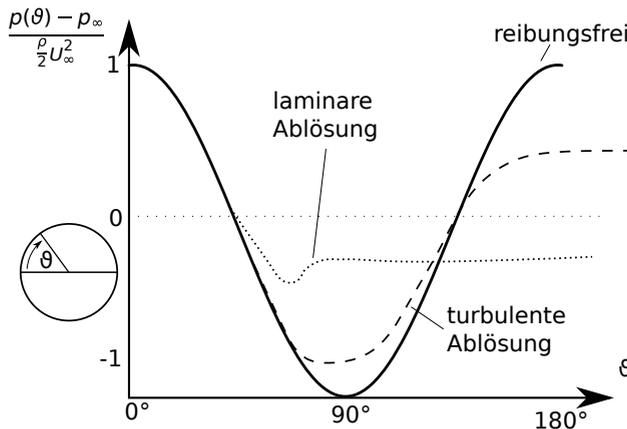
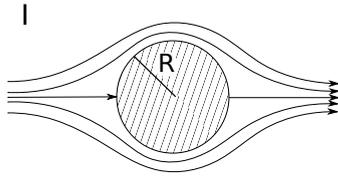
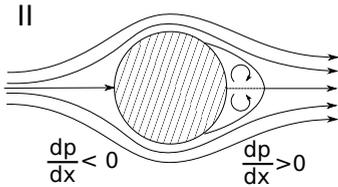


Abbildung 7.15: Druckverlauf auf der Kugeloberfläche (Medianebene) in reibungsfreier und reibungsbehafteter Strömung.

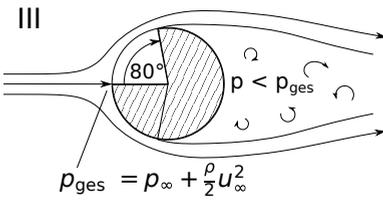
Die Kugelumströmung ist in Abbildung 7.16 für verschiedene Bereiche der Reynolds-Zahl skizziert. Der Fall schleichender Strömung ist bereits bekannt. Mit steigender Reynolds-Zahl kommt es auf der Kugelrückseite zur Ablösung, es bildet sich zunächst eine Rezirkulationsblase in Gestalt eines Ringwirbels. Der Widerstand steigt schneller als linear mit der Anströmgeschwindigkeit. Das Ablösegebiet



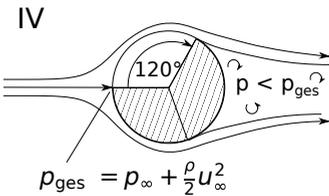
- schleichende Strömung, $Re \lesssim 1$:
 - Stromlinien symmetrisch,
 - $W \propto u_\infty$.



- laminare Grenzschicht löst ab:
 - Rezirkulationsblase an der Kugelmückseite,
 - Nachlaufcharakter.



- laminare Grenzschicht löst ab:
 - ausgedehnter Nachlauf,
 - $p \approx \text{const.} < p_{\text{ges}}$,
 - $c_w = W / (\frac{\rho}{2} u_\infty^2 \pi R^2) \approx \text{const.}$
$$\Rightarrow W \propto u_\infty^2.$$



- Grenzschicht turbulent vor dem Ablösepunkt:
 - Reenergetisierung der Grenzschicht,
 - Ablösung weiter stromab,
 - Nachlauf schmaler.

Abbildung 7.16: Skizzen der Kugelumströmung für verschiedene Bereiche der Reynolds-Zahl (vgl. Abbildung 7.14).

verändert die äußere Umströmung und damit den Druckverlauf am Grenzschicht-
rand vor der Ablösung. Die veränderte Druckverteilung führt dazu, dass sich die

Ablösung nach vorn bewegt und sich schließlich bei einem Winkel von ca. 80° , also bereits vor dem Scheitel, einstellt. Hinter der Kugel bildet sich ein ausgedehntes Totwassergebiet, auch **Nachlauf** (*wake*) genannt, aus. An der Kugelhinterseite ist der Druck im Gebiet des Nachlaufs von der Größe des Drucks in der Außenströmung und damit kleiner als der Gesamtdruck am vorderen Staupunkt. Die daraus resultierende Druckdifferenz verursacht einen Druckwiderstand. Der Reibungswiderstand an der Kugeloberfläche spielt nur noch eine geringe Rolle. Die Druckdifferenz skaliert mit dem Staudruck. Dies führt dazu, dass der mit dem Staudruck dimensionslos gemachte Widerstandsbeiwert konstant und der Widerstand proportional zum Quadrat der Anströmgeschwindigkeit ist. Mit weiter steigender Reynolds-Zahl wird die Grenzschicht vor dem Ablösepunkt turbulent. Der nun turbulenten Grenzschicht wird über Austauschbewegungen von außen energiereiches Fluid zugeführt. Daher kann die turbulente Grenzschicht einem Druckanstieg länger widerstehen und löst erst später ab, hier unter einem Winkel von ca. 120° . Dies geschieht, sobald eine kritische Reynolds-Zahl überschritten wird (bei störungsarmer Anströmung bei $Re \approx 3 \cdot 10^5$, sonst schon früher). Die Ausdehnung des Nachlaufs quer zur Anströmung wird kleiner, die entscheidende Druckdifferenz wirkt über einen kleineren Bereich und der Widerstand sinkt plötzlich, sobald die kritische Reynolds-Zahl überschritten wird.

Die Abhängigkeit des Widerstandes von der Reynolds-Zahl und damit vom Radius resultiert in unterschiedlichen Endgeschwindigkeiten u_0 von im Schwerfeld der Erde fallenden Kugeln der Dichte ρ_K . Im Bereich des Stokes'schen Gesetzes liefert Gleichsetzen von Schwerkraft und Widerstand:

$$W = 6\pi\mu u_0 R = \frac{4}{3}\pi R^3(\rho_K - \rho)g \quad (7.92)$$

$$\Rightarrow u_0 = \frac{2}{9} \frac{\rho_K - \rho}{\mu} g R^2 \propto R^2. \quad (7.93)$$

Dieser Zusammenhang zwischen Endgeschwindigkeit und Radius wird beim Millikan-Versuch zur Bestimmung der Größe der Öltröpfchen ausgenutzt. Im Bereich mit konstantem Widerstandsbeiwert erhält man dagegen:

$$W = c_w \frac{1}{2} \rho u_\infty^2 \pi R^2 = \frac{4}{3}\pi R^3(\rho_K - \rho)g \quad (7.94)$$

$$\Rightarrow u_\infty \propto \sqrt{R}. \quad (7.95)$$

Widerstand kann allein durch Reibung (Platte), aber auch vorwiegend durch Druckunterschiede (Kugel bei höheren Reynolds-Zahlen) zustande kommen. Die Form des umströmten Körpers spielt dabei eine große Rolle. Für einige Fälle sind die Anteile des Reibungs- und Druckwiderstandes in Tabelle 7.1 gegenübergestellt. Körper, bei deren Umströmung es zur Ablösung kommt, haben gewöhnlich einen hohen Anteil an Druckwiderstand.

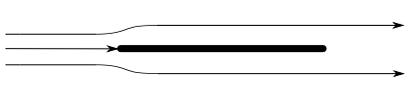
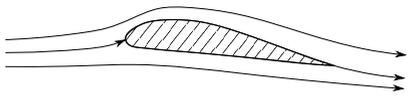
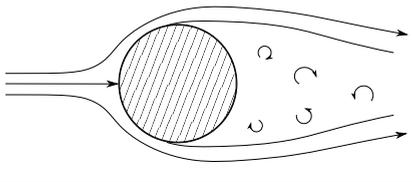
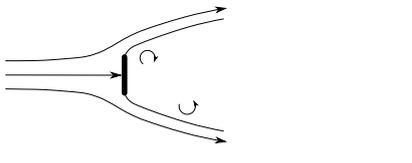
Bild	Körper	Druck- widerstand	Reibungs- widerstand
	ebene Platte	0%	100%
	Profil	$\approx 10\%$	$\approx 90\%$
	Kugel	$\approx 90\%$	$\approx 10\%$
	senkrechte Platte	100%	0%

Tabelle 7.1: Druck- und Reibungswiderstand für einige Körperformen.

Kapitel 8

Wirbel- und drehungsbehaftete Strömungen

8.1 Definitionen

Erste Begriffe zur Beschreibung wirbel- und drehungsbehafteter Strömungen haben wir bereits in Kapitel 3.3 kennengelernt. Es folgt eine Zusammenfassung ergänzt um weitere Begriffe:

- **Wirbelvektor:** $\vec{\omega} := \text{rot } \vec{u} = 2\vec{\dot{\gamma}}$ mit $\vec{\dot{\gamma}}$ als mittlerer Winkelgeschwindigkeit eines Fluidteilchens. Der Betrag $|\vec{\omega}|$ ist die **Wirbeldichte**. Daher wird $\vec{\omega}$ auch als **Wirbeldichtevektor** bezeichnet.
- **wirbelbehaftete Strömung:** $\vec{\omega}$ verschwindet nicht gänzlich, zumindest an singulären Stellen ist $\vec{\omega} \neq 0$ (vgl. Potentialwirbel, Kapitel 3.3iv).
- **Zirkulation/Wirbelstärke:** Integral des Wirbeldichtevektors über eine Fläche A mit Randkurve C (vgl. Kapitel 3.3):

$$\Gamma := \int_A \vec{\omega} \cdot d\vec{A} = \int_A \text{rot } \vec{u} \cdot d\vec{A} = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{s}. \quad (8.1)$$

- **flüssige Linie:** Linie, die dauernd von denselben Fluidteilchen gebildet wird (auch **massenfeste Raumkurve** genannt), vgl. Abbildung 8.1.
- **Wirbellinie** (*vortex line*): existiert dort, wo $\vec{\omega} \neq 0$, verläuft zu jeder Zeit in Richtung des Wirbelvektors (Integralkurven des momentanen Wirbelvektorfeldes). Für ein Linienelement $d\vec{s}$ einer Wirbellinie gilt (vgl. mit Stromlinien, Kapitel 3.1.2):

$$\vec{\omega} \times d\vec{s} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}}. \quad (8.2)$$

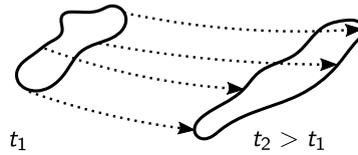


Abbildung 8.1: Flüssige Linie zu zwei Zeiten t_1 und t_2 . Die gepunkteten Linien repräsentieren Bahnlinien einzelner Fluidteilchen der flüssigen Linie.

- **Wirbelröhre** (*vortex tube*): Oberfläche, gebildet von allen Wirbellinien, die durch eine ganz im Fluid liegende geschlossene Kurve C verlaufen (vgl. Stromröhre). Die Betrachtung von Wirbelröhren ist sinnvoll, wenn $\vec{\omega} \neq 0$ nur innerhalb von Wirbelröhren gilt und sonst $\vec{\omega} = 0$, vgl. Abbildung 8.4 unten.
- **Wirbelfaden** (*vortex filament*): Wirbelröhre mit verschwindend kleiner Querschnittsfläche A , wobei jedoch die Zirkulation um den Faden erhalten bleibt, so dass gilt:

$$\lim_{A \rightarrow 0} \int_A \vec{\omega} \, d\vec{A} = \Gamma. \quad (8.3)$$

8.2 Wirbelsätze von Helmholtz und Thompson

Für beliebige Vektoren \vec{a} gilt die Identität $\nabla(\nabla \times \vec{a}) = 0$. Hier setzen wir $\vec{a} = \vec{u}$, identifizieren also den Vektor \vec{a} mit der Strömungsgeschwindigkeit. Damit erhalten wir:

$$\nabla(\nabla \times \vec{u}) = \nabla \cdot \vec{\omega} = 0. \quad (8.4)$$

Das Feld des Wirbelvektors $\vec{\omega}$ ist quellfrei.

Das Feld des Wirbelvektors verhält sich analog zum quellfreien Geschwindigkeitsfeld in inkompressibler Strömung (dort gilt $\nabla \cdot \vec{u} = 0$, vgl. Gleichung (3.20)). Für einzelne Wirbellinien bedeutet dies, dass sie nirgends im Strömungsfeld beginnen oder enden können. Sie bilden entweder geschlossene Kurven oder enden an Berandungen des Strömungsfeldes bzw. reichen bis in

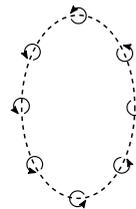


Abbildung 8.2: Ringwirbel: ringförmige Wirbellinie (gestrichelt) und Stromlinien.

das Unendliche. Geschlossene Wirbellinien findet man zum Beispiel in der laminaren Rohrströmung und in Wirbelringen, wie sie gelegentlich von Rauchern als Rauchring ausgestoßen werden, vgl. Abbildung 8.3 und 8.2.

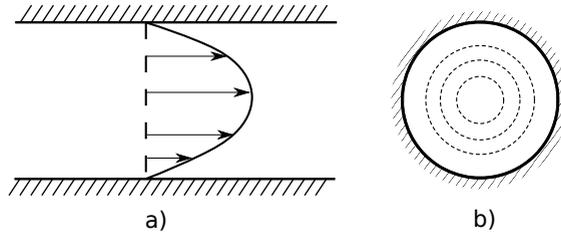


Abbildung 8.3: Rohrströmung: a) Geschwindigkeitsprofil, b) ringförmige Wirbellinien (gestrichelt) im Rohrquerschnitt.

Die Quellfreiheit des Wirbelvektors erlaubt eine Aussage über den Fluss des Wirbelvektors durch eine Wirbelröhre in sonst wirbelfreier Strömung. Dazu betrachten wir in Abbildung 8.4 einen Abschnitt einer Wirbelröhre, der von den Querschnittsflächen A_1 und A_2 begrenzt wird, und integrieren über dessen Volumen V . Dabei beachten wir, dass der Wirbelvektor auf der Mantelfläche überall senkrecht zur Flächennormalen steht, das entsprechende Integral über die Mantelfläche also verschwindet:

$$0 = \int_V \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{u}) \, dV = \int_A \underbrace{\operatorname{rot} \vec{u}}_{=\vec{\omega}} \, d\vec{A} = \int_{A_1+A_2} \vec{\omega} \, d\vec{A} = \underbrace{\int_{A_2} \vec{\omega} \, d\vec{A}}_{=\Gamma_2} + \underbrace{\int_{A_1} \vec{\omega} \, d\vec{A}}_{=-\Gamma_1} \quad (8.5)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma_1 = \Gamma_2}. \quad (8.6)$$

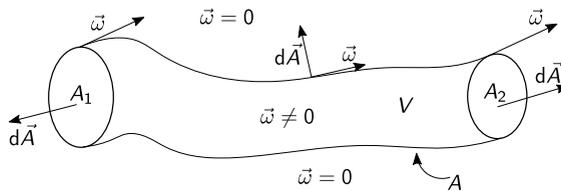


Abbildung 8.4: Abschnitt einer Wirbelröhre in sonst wirbelfreier Umgebung.

Gleichung (8.6) entspricht dem

1. Wirbelsatz von Helmholtz

Der Fluss des Wirbelvektors durch eine Wirbelröhre ist räumlich konstant; die Zirkulation ändert sich nicht längs der gesamten Wirbelröhre.

Auch Wirbelröhren und Wirbelfäden können im Strömungsfeld nicht enden. Dies erkennt man wie folgt. Wir legen den Integrationsweg für ein Zirkulationsintegral wie in Abbildung 8.5 so um einen Wirbelfaden, dass dieser zweimal umschlossen wird. Die beiden Schleifen um den Faden werden dabei in entgegengesetztem Umlaufsinn durchlaufen. Daher heben sich die beiden Beiträge zur Zirkulation gerade gegenseitig auf. Hätte der Faden ein Ende, so könnte man eine Schlaufe über dieses Ende abziehen. Der Integrationsweg umschließt den Faden dann nur einmal und man erhält den Wert der Zirkulation des Wirbelfadens. Da aber die Fläche, die vom Integrationsweg umschlossen wird, vollständig im rotationsfreien Gebiet außerhalb des Wirbelfadens liegt, muss das Zirkulationsintegral grundsätzlich verschwinden. Dies liegt daran, dass nach Gleichung (8.1) das Wegintegral gleich dem Integral des Wirbelvektors über die vom Weg umschlossene Fläche ist. Daher kann ein Wirbelfaden im Strömungsfeld nicht enden.

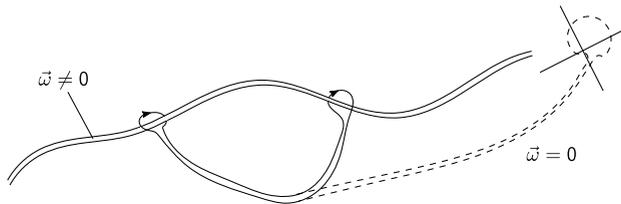


Abbildung 8.5: Zirkulationsweg um einen Wirbelfaden.

Über die sehr kleine Querschnittsfläche A eines Wirbelfadens kann man den Wirbelvektor als praktisch konstant ansehen, $\vec{\omega} \approx \text{const}$ auf A . Die Zirkulation ist dann gegeben durch:

$$\int_A \vec{\omega} \, d\vec{A} = |\vec{\omega}| A = \Gamma = \text{const.} \quad (8.7)$$

Mit abnehmender Querschnittsfläche des Wirbelfadens nimmt die Winkelgeschwindigkeit ($|\vec{\omega}| \propto |\vec{v}|$) zu und umgekehrt.

Helmholtz hat noch zwei weitere bekannte Wirbelsätze abgeleitet. Diese werden hier ohne Beweis wiedergegeben, da sie im allgemeineren Wirbelsatz von Thompson, der anschließend behandelt wird, enthalten sind:

2. und 3. Wirbelsatz von Helmholtz

Wirbelröhren bestehen immer aus denselben Fluidteilchen.

In inkompressiblen, reibungsfreien Fluiden ist die Zirkulation von Wirbelröhren nicht nur räumlich, sondern auch zeitlich konstant.

Wir kommen nun zum **Wirbelsatz von Thompson** (Lord Kelvin). Dieser gilt allgemeiner als die Helmholtz'schen Wirbelsätze für barotrope Fluide, d.h., die Dichte darf vom Druck abhängen (aber nur von diesem allein, $\rho = \rho(p)$). Gesucht ist die zeitliche Änderung der Zirkulation längs einer flüssigen Linie C . In Euler'scher Betrachtungsweise ist die Verfolgung der Bewegung der Linie kompliziert. Wir gehen daher zu Lagrange-Koordinaten über. Dazu parametrisieren wir die Linie C von $\alpha = 0$ am Startpunkt bis $\alpha = \alpha_e$ am Endpunkt, der direkt neben dem Startpunkt liegt, vgl. Abbildung 8.6. In Lagrange-Koordinaten ist die Geschwindigkeit auf der Linie dann eine Funktion von α und der Zeit t , $\vec{u} = \vec{u}(\alpha, t)$. Für die Zirkulation erhalten wir durch Übergang von Euler- zu Lagrange-Koordinaten:

$$\Gamma = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{s} = \int_0^{\alpha_e} \vec{u}(\alpha, t) \frac{\partial \vec{s}}{\partial \alpha} d\alpha. \quad (8.8)$$

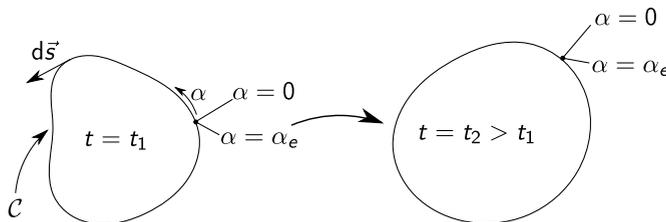


Abbildung 8.6: Flüssige Linie und Lagrange-Koordinaten.

Wir bilden nun die Zeitableitung der Zirkulation. Da α unabhängig von der Zeit ist, stehen unter den Integralen nur partielle Zeitableitungen:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_0^{\alpha_e} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{s}}{\partial \alpha} d\alpha + \int_0^{\alpha_e} \vec{u} \cdot \frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial t \partial \alpha} d\alpha. \quad (8.9)$$

Für die lokale Zeitableitung des Weges gilt in Lagrange-Koordinaten:

$$\frac{\partial \vec{s}(\alpha, t)}{\partial t} = \vec{u}(\alpha, t). \quad (8.10)$$

Damit wird das letzte Integral in Gleichung (8.9) zu

$$\int_0^{\alpha_e} \vec{u} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha} d\alpha = \int_0^{\alpha_e} \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{u}^2}{\partial \alpha} d\alpha = \frac{1}{2} [\vec{u}^2]_0^{\alpha_e} = 0. \quad (8.11)$$

Die Zeitableitung der Zirkulation wird so zu

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_0^{\alpha_e} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{s}}{\partial \alpha} d\alpha = \oint_C \frac{d\vec{u}(\vec{x}, t)}{dt} \cdot d\vec{s}, \quad (8.12)$$

wobei wir ganz rechts in der Gleichung zu Euler-Koordinaten zurückgekehrt sind. Wir beschränken uns jetzt auf ein reibungsfreies Fluid in einem konservativen Kraftfeld, die Kraft \vec{F} ist also durch ein Potential U darstellbar, $\vec{F} = \nabla U$. Damit können wir die totale Zeitableitung der Geschwindigkeit über die Euler-Gleichung ersetzen. Wir erhalten:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_C \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot d\vec{s} = - \oint_C \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\vec{s} + \oint_C \nabla U \cdot d\vec{s}. \quad (8.13)$$

Als Potential einer konservativen Kraft ist U eindeutig. Damit verschwindet das Integral über ∇U . Für reibungsfreie Fluide in konservativen Kraftfeldern gilt damit folgender Wirbelsatz:

$$\boxed{\frac{d\Gamma}{dt} = - \oint_C \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\vec{s}.} \quad (8.14)$$

Ist das Fluid außerdem barotrop, so erhalten wir mit $1/\rho \nabla p = \nabla P$ (vgl. Kapitel 4.2.2) den

Wirbelsatz von Thompson (*Kelvin circulation theorem*)

$$\frac{d\Gamma}{dt} = - \oint_C \nabla P \cdot d\vec{s} = 0. \quad (8.15)$$

Mit dem Thompson'schen Wirbelsatz lässt sich nun die Aussage von Helmholtz beweisen, dass Wirbelröhren, -fäden und -linien immer aus denselben Fluidteilchen bestehen. Dazu betrachten wir eine kleine geschlossene flüssige Linie auf der Mantelfläche einer Wirbelröhre. Die Zirkulation längs dieser Linie verschwindet, da der Wirbelvektor auf der Mantelfläche definitionsgemäß senkrecht zur Flächennormalen ist. Nach dem Thompson'schen Wirbelsatz bleibt die Zirkulation dann auch für alle Zeiten Null, da die zeitliche Änderung der Zirkulation verschwindet. Es gibt daher keinen Wirbelfluss durch die Mantelfläche. Falls in reibungsfreien, barotropen Fluiden unter konservativen Kräften für ein Fluidteilchen zu irgendeiner Zeit $\text{rot } \vec{u} = \vec{\omega} = 0$ gilt, dann besaß das Teilchen nie Rotation und wird auch nie solche erlangen.

8.3 Gesetz von Biot-Savart

Das aus der Elektrodynamik bekannte Gesetz von Biot-Savart kann auch angewandt werden, um das Geschwindigkeitsfeld um einen Wirbelfaden in einem unendlich ausgedehnten Fluid konstanter Dichte zu bestimmen. Im inkompressiblen Fluid erfüllt die Geschwindigkeit überall $\operatorname{div} \vec{u} = 0$. Weiterhin ist bei bekannter Lage eines Wirbelfadens konstanter Zirkulation Γ die Verteilung von $\vec{\omega} = \operatorname{rot} \vec{u}$ vorgegeben. Für Vektorfelder, die diese Voraussetzungen erfüllen, gibt es eindeutige Lösungen für das Geschwindigkeitsfeld. Wie diese aussehen, leiten wir hier durch einen Vergleich mit der analogen Situation in der Elektrodynamik ab. Dort gelten für die magnetische Feldstärke \vec{H} , die dielektrische Verschiebung \vec{D} und den Stromdichtevektor \vec{j} die Maxwell-Gleichungen, insbesondere

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}} \quad \text{und} \quad \operatorname{div}(\mu_0 \vec{H}) = 0, \quad (8.16)$$

mit der Induktionskonstanten μ_0 . Im Fall von Gleichstrom ($\dot{\vec{D}} = 0$) liefert die Integration der ersten Maxwell-Gleichung entlang eines geschlossenen Weges C um einen stromdurchflossenen Leiter (wobei der Weg C die Fläche A umschließt):

$$\int_A \operatorname{rot} \vec{H} \cdot d\vec{A} = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = I. \quad (8.17)$$

I bezeichnet hier den Strom durch den Leiter. Diese Gleichung entspricht formal der Definition der Zirkulation:

$$\int_A \operatorname{rot} \vec{u} \cdot d\vec{A} = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{s} = \int_A \vec{\omega} \cdot d\vec{A} = \Gamma. \quad (8.18)$$

Die andere Maxwell-Gleichung, Quellfreiheit des Magnetfeldes, ist analog zur Quellfreiheit des inkompressiblen Strömungsfeldes. Damit ergeben sich folgende Zuordnungen zwischen elektrodynamischen und strömungsmechanischen Größen:

stromdurchflossener Leiter	\leftrightarrow	Wirbelfaden,
Stromstärke I	\leftrightarrow	Zirkulation Γ ,
Stromdichtevektor \vec{j}	\leftrightarrow	Wirbelvektor $\vec{\omega}$,
magnetische Feldstärke \vec{H}	\leftrightarrow	Geschwindigkeit \vec{u} .

Ersetzt man also im Biot-Savart-Gesetz der Elektrodynamik \vec{H} durch \vec{u} und I durch Γ , so erhält man das Biot-Savart-Gesetz für das von einem Wirbelfaden induzierte Strömungsfeld. Integriert wird dabei längs des Wirbelfadens S (vgl. Abbildung 8.7):

Gesetz von Biot-Savart

$$\vec{u}(\vec{x}) = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_S \frac{d\vec{s}' \times \vec{r}'}{r'^3}. \quad (8.19)$$

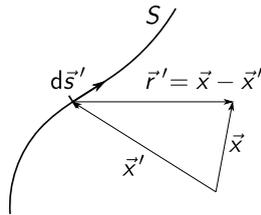


Abbildung 8.7: Zur Integration längs eines Wirbelfadens.

Beispiele Als erstes betrachten wir in Abbildung 8.8 einen einzelnen, geraden, unendlich langen Wirbelfaden, einen sogenannten Stabwirbel, dessen Lage mit der z -Achse übereinstimmt. Das Kreuzprodukt im Biot-Savart-Gesetz führt zu kreisförmigen Stromlinien um den Wirbelfaden (vgl. mit kreisförmigen magnetischen Feldlinien um einen unendlich langen, geraden Stromleiter).

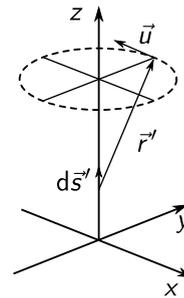


Abbildung 8.8: Stabwirbel.

Interessanter wird es, wenn mehrere parallel zueinander angeordnete Stabwirbel miteinander wechselwirken. Die einzelnen Wirbel induzieren am Ort der jeweils anderen Wirbel eine Strömungsgeschwindigkeit. Da Wirbelfäden immer aus denselben Fluidteilchen bestehen (Helmholtz'scher Wirbelsatz), führt dies dazu, dass sich die Wirbel mit dem Strömungsfeld mitbewegen. In Abbildung 8.9 ist dies für den Fall zweier Wirbel skizziert. Ein Wirbelpaar betragsmäßig gleicher, aber vorzeichenmäßig ent-

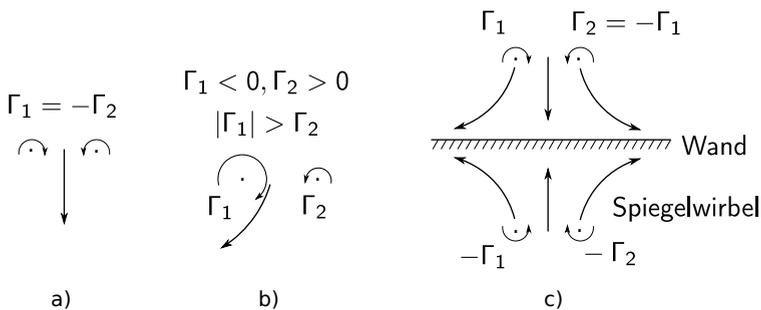


Abbildung 8.9: Stabwirbelpaare: a) geradlinige Fortbewegung, b) „tanzendes Wirbelpaar“, c) Wechselwirkung mit einer Wand.

gegengesetzter Zirkulation bewegt sich geradlinig senkrecht zur Verbindungslinie der beiden Wirbel fort (Abbildung 8.9a). Unterscheidet sich die Zirkulation der beiden Wirbel betragsmäßig, „tanzen“ die beiden Wirbel um einen gemeinsamen Schwerpunkt, der auf ihrer Verbindungslinie liegt. Ein tanzendes Wirbelpaar ist in Abbildung 8.9b angedeutet.

Im letzten Beispiel (Abbildung 8.9c) wird wieder ein Wirbelpaar gleichen Zirkulationsbetrags, aber vorzeichenmäßig entgegengesetzter Zirkulation betrachtet. Das Wirbelpaar bewegt sich diesmal auf eine feste Wand zu. Im hier reibungsfreien Strömungsfeld muss die Normalkomponente der Geschwindigkeit an der Wand verschwinden. Dies kann man dadurch erfüllen, dass man das Wirbelpaar an der Wand spiegelt. Direkt an der Wand heben sich dann die Normalkomponenten der Geschwindigkeiten auf. Auch das gespiegelte Wirbelpaar bewegt sich auf die Wand zu. Mit abnehmendem Wandabstand führt der Einfluss der sich jeweils (über die Wand hinweg) gegenüberliegenden Wirbel dazu, dass die Wirbel nach außen auseinander laufen.

8.4 Wirbelsatz von Crocco

Es gibt einen Zusammenhang zwischen den kinematischen Größen Geschwindigkeit und Wirbelvektor auf der einen Seite und den thermodynamischen Größen Entropie und Ruheenthalpie auf der anderen Seite. Diesen Zusammenhang leiten wir hier für stationäre, reibungsfreie Strömungen ohne äußere Kräfte ab. Ausgangspunkt ist die Euler-Gleichung. Stationär bleibt nur der konvektive Term der Zeitableitung, den wir wie in Gleichung (3.12) schreiben:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = \frac{1}{2}\nabla\vec{u}^2 - \vec{u} \times \vec{\omega} = -\frac{1}{\rho}\nabla p. \quad (8.20)$$

Weiterhin verwenden wir die Gibbs'sche Fundamentalgleichung (6.81), in der wir die innere Energie über die Definition der Enthalpie eliminieren. Mit $h = e + p/\rho$, also $dh = de + p d(1/\rho) + 1/\rho dp$, folgt:

$$T ds = de + p d\frac{1}{\rho} = dh - \frac{1}{\rho} dp. \quad (8.21)$$

Dies nutzen wir, um den Druckterm $(1/\rho\nabla p)$ in der Euler-Gleichung zu ersetzen:

$$\frac{1}{2}\nabla\vec{u}^2 - \vec{u} \times \vec{\omega} = T\nabla s - \nabla h. \quad (8.22)$$

Mit der Energiegleichung, $h + \vec{u}^2/2 = h_0$, die entlang einzelner Stromlinien gilt, erhalten wir schließlich den

Wirbelsatz von Crocco

$$\vec{u} \times \vec{\omega} = \nabla h_0 - T\nabla s. \quad (8.23)$$

In den meisten Fällen, z.B. beim Flug durch ruhende Atmosphäre konstanten Zustands, ist die Ruheenthalpie h_0 nicht nur längs einzelner Stromlinien, sondern im gesamten Strömungsfeld konstant. Dann bleibt vom Wirbelsatz von Crocco:

$$\vec{u} \times \vec{\omega} = -T\nabla s. \quad (8.24)$$

In isentroper Strömung ($s = \text{const}$) wird dies erfüllt für

- $\vec{u} = 0$ (triviale Lösung),
- $\vec{\omega} = 0$ (wirbelfreie Strömung),
- $\vec{u} \parallel \vec{\omega}$: nur möglich in dreidimensionalen Strömungen (Strömungen mit $\vec{u} = \|\vec{\omega}\|$ heißen Beltrami-Strömungen).

In nichtisentroper Strömung ($\nabla s \neq 0$) folgt:

- $\nabla s \perp \vec{u} \Rightarrow s = \text{const}$ längs Stromlinien, die Entropie ändert sich nur senkrecht zu den Stromlinien.

Ein Beispiel für eine nichtisentrope wirbelbehaftete Strömung ist das Gebiet hinter einem gekrümmten Stoß in homogener Parallelanströmung. Vor dem Stoß ist die Strömung isentrop und wirbelfrei. Der Entropieanstieg über den Stoß hängt nur von der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zum Stoß ab. Diese Komponente variiert über die Stoßfront. Hinter dem Stoß existiert daher ein Entropiegradient $\nabla s \neq 0$, vgl. Abbildung 8.10. Damit ist nach Gleichung (8.24) die Strömung dort auch wirbelbehaftet. Durch den gekrümmten Stoß kommt es zur Erzeugung von Wirbelstärke.

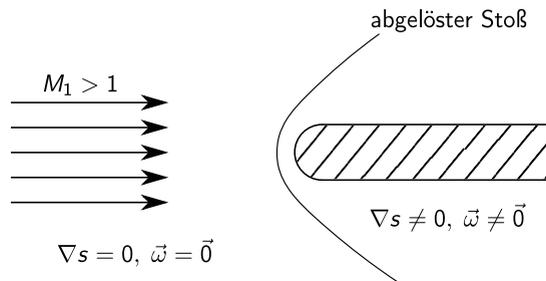


Abbildung 8.10: Wirbelstärkeerzeugung über einen gekrümmten Stoß.

8.5 Drehungsbehaftete Strömung mit Zähigkeit

Ziel dieses Abschnitts ist es, die zeitliche Änderung der Wirbeldichteverteilung zu beschreiben. Wir leiten dazu eine Gleichung für die Zeitableitung des Wirbelvektors ab. Dabei werden folgende Identitäten verwendet:

$$(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = \frac{1}{2}\nabla\vec{u}^2 - \vec{u} \times (\nabla \times \vec{u}), \quad (8.25)$$

$$\Delta\vec{u} = \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{u}), \quad (8.26)$$

$$\nabla \times (\nabla a) = 0, \quad a: \text{Skalar}, \quad (8.27)$$

$$\nabla \times (\vec{u} \times \vec{\omega}) = (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{u} - (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{\omega} + \vec{u}(\nabla \cdot \vec{\omega}) - \vec{\omega}(\nabla \cdot \vec{u}). \quad (8.28)$$

Ausgangspunkt ist die Bewegungsgleichung für ein viskoses, barotropes Fluid unter der Wirkung konservativer Kräfte. Dies ist die Gleichung (4.39), wobei die Reibungsterme wie in Gleichung (4.40) unter der Annahme konstanter Viskositäten umgeformt werden. Dabei lassen wir zu, dass die Dichte eine Funktion des Drucks ist (Barotropie). Daher verschwindet die Divergenz der Geschwindigkeit hier nicht. Damit lautet die Bewegungsgleichung:

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\vec{u} + \frac{1}{\rho}(\mu + \lambda)\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \vec{F}. \quad (8.29)$$

Für die Volumenviskosität λ gilt aufgrund der Stokes'schen Hypothese nach Gleichung (4.27) $\lambda = -2/3\mu$. Der Druckterm wird in der barotropen Strömung über die in Kapitel 4.2.2 eingeführte Funktion $P = \int dp/\rho$ und das konservative Kraftfeld \vec{F} über sein Potential U , $\vec{F} = \nabla U$, ausgedrückt. Ersetzt man noch die konvektive Zeitableitung über Gleichung (8.25) und $\Delta\vec{u}$ über Gleichung (8.26) so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\vec{u}^2 - \vec{u} \times (\nabla \times \vec{u}) = \\ -\nabla P + \nu\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \nu\nabla \times (\nabla \times \vec{u}) + \frac{1}{3}\nu\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \nabla U. \end{aligned} \quad (8.30)$$

Wir wenden auf beide Seiten den Rotationsoperator an. Unter Beachtung der dritten Identität (Gleichung (8.27)), und da $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$, folgt:

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + 0 - \nabla \times (\vec{u} \times \vec{\omega}) = 0 + 0 - \nu\nabla \times (\nabla \times \vec{\omega}) + 0 + 0. \quad (8.31)$$

Damit sind Druck und Kraft aus der Gleichung eliminiert. Mit der zweiten Identität (Gleichung (8.26)), diesmal für den Wirbelvektor und mit $\nabla\vec{\omega} = 0$, wird noch die rechte Seite umgeschrieben und wir erhalten:

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{u} \times \vec{\omega}) = \nu\Delta\vec{\omega}. \quad (8.32)$$

Den zweiten Term ersetzen wir über die vierte Identität (Gleichung (8.28)), wieder mit $\nabla\vec{\omega} = 0$, und erhalten so die

Wirbeltransportgleichung
für barotrope, reibungsbehaftete Fluide in
konservativen Kraftfeldern

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{\omega} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{u} - \vec{\omega}(\nabla \cdot \vec{u}) + \nu\Delta\vec{\omega}. \quad (8.33)$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

- i) reibungsfreie, inkompressible ($\nabla \cdot \vec{u} = 0$) Strömung: es gilt die

Helmholtz'sche Wirbeldifferentialgleichung

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{u}. \quad (8.34)$$

Die rechte Seite der Helmholtz'schen Wirbeldifferentialgleichung ist proportional zur Richtungsableitung der Geschwindigkeit in Richtung des Wirbelvektors. Für einen Wirbelfaden gibt es dazu eine anschauliche Deutung. In Abbildung 8.11 betrachten wir zwei um eine kleine Strecke s voneinander getrennte materielle Punkte (Fluidteilchen) A und B auf einem Wirbelfaden. Mit $\delta\vec{u}$ sei die Geschwindigkeit des Punktes B relativ zum Punkt A bezeichnet. Diese Geschwindigkeit zerlegen wir in eine Komponente senkrecht ($\delta\vec{u}_\perp$) und parallel ($\delta\vec{u}_\parallel$) zum Wirbelfaden. Für die relative Änderung des Betrags des Wirbeldichtevektors folgt aus Gleichung (8.34):

$$\frac{1}{|\vec{\omega}|} \frac{d|\vec{\omega}|}{dt} = \frac{1}{s} \frac{ds}{dt} = \frac{\delta|\vec{u}_\parallel|}{s}. \quad (8.35)$$

Für die Wirbeldichte $|\vec{\omega}|$ im Wirbelfaden bedeutet dies:

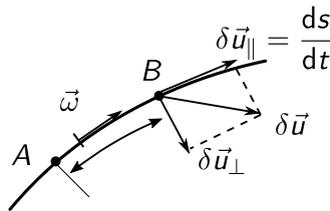


Abbildung 8.11: Streckung eines Wirbelfadens.

- Streckung eines Wirbelfadens \Rightarrow Vergrößerung von $|\vec{\omega}|$,
- Stauchung eines Wirbelfadens \Rightarrow Verringerung von $|\vec{\omega}|$.

Dies ist in Übereinstimmung mit der aus dem Helmholtz’schen Wirbelsatz folgenden Beziehung zwischen Wirbeldichte, Querschnittsfläche des Fadens und Zirkulation, $|\vec{\omega}|A = \Gamma = \text{const}$ (Gleichung (8.7)).

ii) inkompressible, ebene Strömung:

In ebener Strömung ist $\vec{\omega} \perp \vec{u}$. Daraus folgt $(\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{u} \equiv 0$. Verläuft die Strömung z.B. in der xy -Ebene, so hat $\vec{\omega}$ nur eine Komponente, $\vec{\omega} = (0, 0, \omega_z)$. Zusammen mit $\nabla\vec{u} = 0$ (Inkompressibilität) folgt aus der Wirbeltransportgleichung für ω_z :

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \nu \Delta \omega_z. \tag{8.36}$$

Dies ist eine Diffusionsgleichung für die Wirbeldichte mit der kinematischen Viskosität als Diffusionskonstante. In der Zeitableitung sorgt der konvektive Anteil allein für Konvektion, nicht aber für einen Übergang von Wirbeldichte auf andere Fluidteilchen.

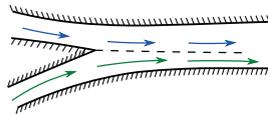
Die Wirbeltransportgleichung sowie die daraus abgeleiteten Gleichungen für die oben betrachteten Fälle beschreiben die Veränderung der Verteilung von Wirbeldichte im Raum, im ersten Fall durch Veränderung der Querschnittsfläche eines Wirbelfadens, im zweiten Fall durch Diffusion. Die Entstehung von Wirbeldichte wird dadurch nicht beschrieben.

Zähigkeit verursacht nur Diffusion von Wirbeldichte, nicht aber ihre Produktion.

Wirbeldichtequellen Die Wirbelstärke Γ bezüglich einer flüssigen Linie ist nur unter den Voraussetzungen des Thompson’schen Wirbelsatzes konstant. Wenn diese nicht erfüllt sind, kann sich die Zirkulation zeitlich ändern:

- nicht barotrope Strömungen: $\frac{d\Gamma}{dt} = - \oint \frac{dp}{\rho} \neq 0$, vgl. Gleichung (8.14),
- nicht-konservative Kräfte \vec{F} (z.B. Coriolis-Kraft, Lorentz-Kraft), vgl. Gleichung (8.13), letzter Term,
- Unstetigkeitsflächen: Zusammenfließen zuvor getrennter Fluide:

– zwei Flüsse:



– tangential beschleunigte Wand.

Die ersten beiden Punkte spielen in der Meteorologie eine Rolle. In der Atmosphäre sind Luftmassen oft baroklin geschichtet, d.h., Isobaren und Isothermen liegen nicht wie bei Barotropie parallel zueinander. Weiterhin erfahren sich bewegende Luftmassen im System der rotierenden Erde eine Coriolis-Kraft. Ein Beispiel für den letzten Punkt haben wir mit der ruckartig beschleunigten Platte in Kapitel 4.4*iii* kennengelernt.

8.6 Ausklang: Anfahrwirbel und induzierter Widerstand

Zum Abschluss der „Einführung in die Strömungsmechanik“ kommen wir auf den Tragflügel zurück. In Kapitel 5.2 hatten wir gesehen, dass für das Entstehen von Auftrieb neben einer Anströmung auch Zirkulation um den Tragflügel existieren muss (Satz von Kutta-Joukowski). Wenn ein Flugzeug auf dem Rollfeld steht, ist die Zirkulation um die Tragflügel jedoch zunächst Null. Nach dem Wirbelsatz von Thompson muss das auch so bleiben. Wie es dennoch zu Zirkulation kommen kann und welche weiteren Auswirkungen damit verbunden sind, wird im Folgenden skizziert. Für tiefergehende Ausführungen sei auf das Gebiet der Aerodynamik verwiesen.

Anfahrwirbel Direkt nach dem Start, wenn die Umströmung des Tragflügels beginnt, sind Reibungseffekte zunächst auf eine sehr dünne Grenzschicht beschränkt (ähnlich wie bei der ruckartig beschleunigten Platte). Die Strömung entspricht im Wesentlichen der potentialtheoretischen Lösung (Abbildung 8.12a), d.h. die Hinterkante wird von unten her umströmt, der hintere Staupunkt liegt auf der Oberseite. Das entspricht dem Stromlinienbild, welches sich in einer Hele-Shaw-Strömung um ein Tragflügelprofil einstellt. Auf der Oberseite, auf dem Weg von der Hinterkante zum hinteren Staupunkt, nimmt die Strömungsgeschwindigkeit sehr schnell ab ($\vec{u} = 0$ am Staupunkt). Der damit verbundene Druckanstieg (Bernoulli-Gleichung) führt zur Ablösung. Die Grenzschicht rollt sich zum sogenannten **Anfahrwirbel** (*starting vortex*) auf, vgl. Abbildung 8.12b. Der Drehsinn des Anfahrwirbels entspricht dem der anfänglichen Umströmung der Hinterkante. Ein

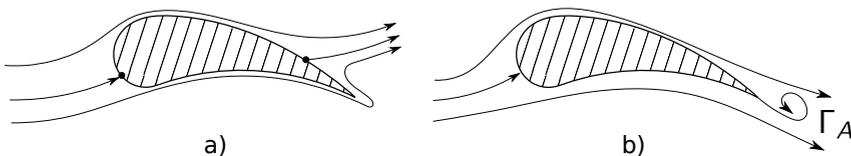


Abbildung 8.12: Start eines Tragflügels: a) anfangs reibungs- und wirbelfreie Strömung, b) Bildung eines Anfahrwirbels.

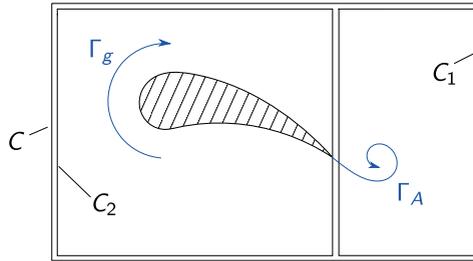


Abbildung 8.13: Zirkulation am Tragflügel beim Startvorgang.

Zirkulationsintegral längs einer Kurve C weit außerhalb der von Reibungseffekten beeinflussten Gebiete liefert weiterhin für die Zirkulation $\Gamma = 0$. Die Zirkulation Γ_A des Anfahrwirbels erhält man über das Zirkulationsintegral längs der Kurve C_1 in Abbildung 8.13. Die Zirkulation des Anfahrwirbels wird durch eine Zirkulation Γ_g entgegengesetzten Vorzeichens um den Tragflügel kompensiert ($\Gamma_g = -\Gamma_A$). Dabei ist Γ_g die Zirkulation längs des Weges C_2 , vgl. Abbildung 8.13. Die Zirkulation des Anfahrwirbels steigt mit der Zeit an, bis die entgegengesetzte Zirkulation um den Tragflügel gerade so groß geworden ist, dass die außerhalb der Grenzschicht reibungsfreie Strömung glatt an der Hinterkante abfließt (Kutta-Joukowski'sche Abflussbedingung).

Wirbelsystem Ein realer Tragflügel hat eine endliche Spannweite. Der Ausgleich von Druckunterschieden zwischen Ober- und Unterseite führt dazu, dass die Flügelenden umströmt werden (vgl. Abbildung 8.14). Stromab der Flügelenden bilden sich zwei Wirbel, die sogenannten **freien Wirbel** (*trailing vortices*), mit Achsen praktisch parallel zur Anströmung. Der Wirbel um den Tragflügel mit der auftriebserzeugenden Zirkulation Γ_g wird über einen Wirbelfaden am Ort des Tragflügels repräsentiert, der als **gebundener Wirbel** (*bound vortex*) bezeichnet wird. Das in Abbildung 8.15 gezeigte System aus gebundenem, den beiden freien und dem Anfahrwirbel kann näherungsweise als geschlossener Wirbelfaden approxi-

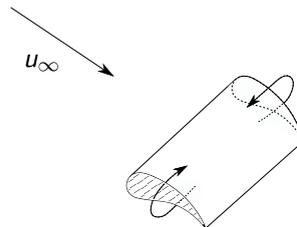


Abbildung 8.14: Umströmung der seitlichen Enden eines Tragflügels.

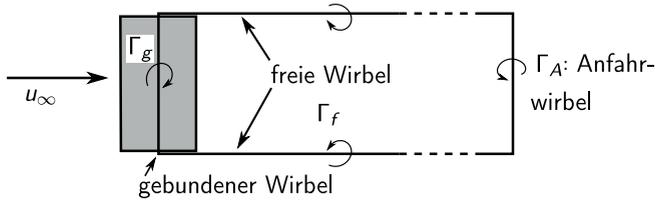


Abbildung 8.15: Wirbelsystem am Tragflügel endlicher Spannweite.

miert werden (vgl. Wirbelsatz von Helmholtz). Die Zirkulation dieses geschlossenen Wirbelfadens entspricht der des gebundenen Wirbels, $\Gamma_g = \Gamma_f = \Gamma_A$. In der Realität verschwindet der Anfahrwirbel mit der Zeit durch Diffusion. Es bleiben der gebundene und die beiden freien Wirbel, die bis weit hinter den Flügel reichen, vgl. Abbildung 8.16. Das System aus dem gebundenen und den freien Wirbeln ist als **Hufeisenwirbel** (*horseshoe vortex*) bekannt. Die beiden freien Wirbel hinter dem Tragflügel werden auch als **Wirbelschlepe** (*wake vortices*) bezeichnet.

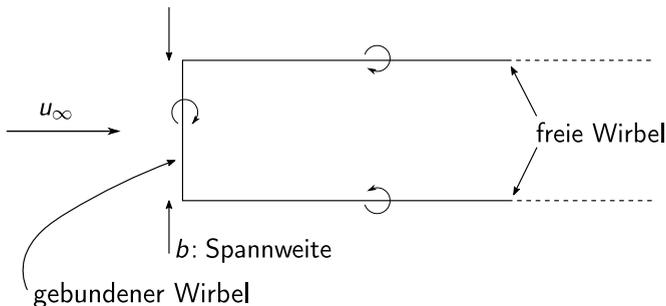


Abbildung 8.16: Hufeisenwirbel.

Induzierter Widerstand (*induced drag*) Die fortwährende Erzeugung der freien Wirbel ist mit der Verrichtung von Arbeit verbunden. Dies äußert sich in einem Widerstand. Den Widerstand kann man nach Prandtl über das Wirbelsystem abschätzen. Lange nach dem Startvorgang bleiben vom Wirbelsystem nur noch der gebundene Wirbel und die beiden freien Wirbel. Letztere kann man als zwei halbunendliche Wirbelfäden ansehen. Diese erzeugen am Ort des Tragflügels durch Induktion (Biot-Savart-Gesetz) einen Abwind v_i . Beträgsmäßig ist der Abwind klein gegen die Anströmgeschwindigkeit u_∞ , $v_i \ll u_\infty$. Der Abwind verändert jedoch die Richtung der Anströmung um einen kleinen Winkel α_i . Die resultierende effektive Anströmgeschwindigkeit u_{eff} hat den Betrag $u_{\text{eff}} = u_\infty / \cos \alpha_i$, vgl. Abbildung 8.17. Die Querkraft R auf den Tragflügel wirkt senkrecht zur effektiven

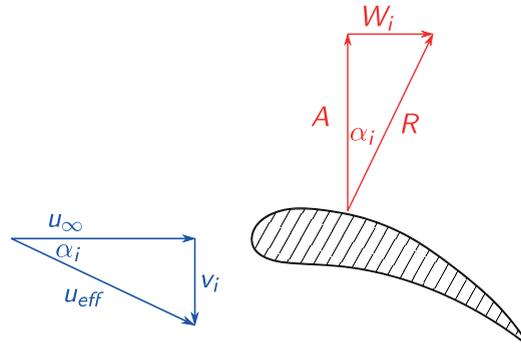


Abbildung 8.17: Geschwindigkeiten und Kräfte am Tragflügel endlicher Spannweite.

Anströmrichtung. Zusätzlich zum Auftrieb A (Komponente der Querkraft, die der Schwerebeschleunigung entgegengesetzt ist) ergibt sich ein induzierter Widerstand W_i , vgl. Abbildung 8.17. Es gilt:

$$\frac{v_i}{u_\infty} = \frac{W_i}{A} \quad \Rightarrow \quad W_i = \frac{v_i}{u_\infty} A. \quad (8.37)$$

An der Tragflügelmitte, bei $b/2$, induzieren die zwei halbinendlich langen Wirbelfäden die gleiche Geschwindigkeit wie ein unendlich langer Faden gleicher Zirkulation. Zwischen der Zirkulation Γ der freien Wirbel und dem Abwind v_i gilt dann die Beziehung:

$$\Gamma = 2\pi \frac{b}{2} v_i \quad \Rightarrow \quad v_i = \frac{\Gamma}{\pi b}. \quad (8.38)$$

Die Zirkulation kann über den Satz von Kutta und Joukowski durch die effektive Querkraft R ersetzt werden. Da der Satz von Kutta und Joukowski die Querkraft pro Längeneinheit in Spannweitenrichtung wiedergibt, muss noch mit der Spannweite b multipliziert werden. Berücksichtigt man weiterhin, dass $R = A/\cos \alpha_i$ und $u_{\text{eff}} = u_\infty/\cos \alpha_i$, so ist:

$$R = \rho u_{\text{eff}} \Gamma b \quad \Rightarrow \quad \Gamma = \frac{R}{\rho u_{\text{eff}} b} = \frac{A}{\rho u_\infty b}. \quad (8.39)$$

Damit erhält man für den induzierten Widerstand:

$$W_i = \frac{\Gamma}{\pi b} \frac{1}{u_\infty} A = \frac{A^2}{\pi \rho u_\infty^2 b^2} \propto A^2. \quad (8.40)$$

Der induzierte Widerstand ist proportional zum Quadrat des Auftriebs und damit auch zum Quadrat des Gewichts eines Flugzeuges. Die genaue Form hängt von Details ab, die in dieser vereinfachten Darstellung nicht berücksichtigt wurden.

Das Wirbelsystem verursacht nicht nur den induzierten Widerstand. Der Hufeisenwirbel induziert auch eine Geschwindigkeit am Boden weit unter dem Flugzeug. Dort muss die Normalkomponente der Geschwindigkeit verschwinden. Dies erreicht man in der Rechnung durch Spiegelung des Hufeisenwirbels am Boden (vgl. Kapitel 8.3, Abbildung 8.9c). Das von den beiden Wirbelsystemen induzierte Geschwindigkeitsfeld erfüllt dann die Randbedingung. Aus dem Geschwindigkeitsfeld erhält man über die Bernoulli-Gleichung die Druckverteilung am Boden. Es ergibt sich eine Druckerhöhung, die, integriert über den Boden, das Gewicht des Flugzeuges kompensiert.



Abbildung 8.18: Visualisierung eines freien Wirbels hinter dem startenden Forschungsflugzeug ATTAS (DLR, [CC-BY 3.0](#), [CC BY 3.0 DE](#), via [Wikimedia Commons](#)).

Anhang A

Literatur

Freie Ressourcen im Internet:

Ludwig Prandtl's bekanntes erste Lehrbuch der Strömungsmechanik:
Prandtl, L.: *Abriß der Strömungslehre*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1935, Nachdruck im Universitätsverlag Göttingen, doi: <https://doi.org/10.17875/gup2017-1003>.

Standardwerk zur Strömungsmechanik:

Wieghardt, K.: *Theoretische Strömungslehre*. Teubner, Stuttgart, 1974, Nachdruck im Universitätsverlag Göttingen, doi: <https://doi.org/10.17875/gup2005-72>.

Bildmaterialien, Literatur und weitere Informationen:

Adrian, R. J., Smits, A. J., Gogineni, S. P. (edts.): *A Free One-Stop Resource for Fluid Dynamics and Flow Engineering*. <http://www.efluids.com>

Historische Lehrfilme zu einzelnen Themen der Strömungsmechanik:

National Committee for Fluid Mechanics Films (NCFMF): *Fluid Mechanics Film Series*. <http://web.mit.edu/hml/ncfmf.html>

Weiterführende Lehrbücher:

Acheson, D. J.: *Elementary Fluid Dynamics*. Oxford Univ. Press, Oxford, 1990.

Batchelor, G. K.: *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.

Chorin, A. J., Marsden, J. E., *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. Springer-Verlag, New York, 1990.

Faber, T. E.: *Fluid Dynamics for Physicists*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

Hutter, K.: *Fluid- und Thermodynamik. Eine Einführung*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.

Kuhlmann, H.: *Strömungsmechanik*. Pearson Studium, München, 2007.

- Lamb, H.: *Hydrodynamics*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- Landau, L. D., Lifschitz, E. M.: *Lehrbuch der theoretischen Physik*. Bd. 6, *Hydrodynamik*. Harri Deutsch, Frankfurt, 1991.
- Prandtl, L., Oswatitsch, K., Wieghardt, K.: *Führer durch die Strömungslehre*. Vieweg, Wiesbaden, 1990.
- Schlichting, H., Gersten, K.: *Grenzschicht-Theorie*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- Spurk, J. H., Aksel, N.: *Strömungslehre. Einführung in die Theorie der Strömungen*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- Tritton, D. J.: *Physical Fluid Dynamics*. Oxford Univ. Press, Oxford, 1999.
- Truckenbrodt, E.: *Fluidmechanik*.
- Band 1: *Grundlagen und elementare Strömungsvorgänge dichtebeständiger Fluide*. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- Band 2: *Elementare Strömungsvorgänge dichteveränderlicher Fluide sowie Potentialströmungen und Grenzschichtströmungen*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

Diese „Einführung in die Strömungsmechanik“ entspricht vom Umfang der gleichnamigen Vorlesung, die an der Georg-August-Universität Göttingen regelmäßig für Student*innen der Physik ab dem dritten Studienjahr im Profilierungsbereich angeboten wird. Behandelt werden Eigenschaften der Flüssigkeiten und Gase, Kontinuitäts-, Bewegungs- und Energiegleichung, Ähnlichkeitsbetrachtungen, Stromfadentheorie, Grenzschichten und Wirbelsätze. Die Darstellung der theoretischen und experimentellen Grundlagen wird durch zahlreiche Beispiele aus Natur und Technik ergänzt.